Classe de première L

Orientations générales

Pour bon nombre d'élèves qui s'orientent en série L, la classe de première sera une fin d'étude en mathématiques au lycée.
On a donc voulu ici assurer à tous ces élèves une *culture de base en mathématiques*; celle-ci concerne essentiellement l'information chiffrée ou graphique, qui ne doit pas être reçue passivement mais plutôt interprétée, critiquée et reformulée.
On privilégiera l'intuition plus que la rigueur formelle, la signification des calculs plus que les techniques opératoires, les applications plus que les développements théoriques. De même, lors des enseignements en classe ou en demi-classe, on favorisera les activités individuelles ou en petits groupes de façon à rendre ces élèves aussi autonomes que possible dans le travail mathématique demandé.
Ce programme comporte une dimension informatique voulue lors de la mise en place de la réforme. Cette dimension peut améliorer la motivation des élèves. Elle entre par ailleurs actuellement dans la *culture mathématique* évoquée ci-dessus : chaque élève sortant de la formation initiale doit avoir la maîtrise mathématique nécessaire à un usage élémentaire des ordinateurs. L'usage de tableurs et d'autres logiciels se généralise depuis la classe de quatrième; en seconde, le renvoi à l'utilisation d'outils informatiques est fréquent dans le programme; en première L, les exigences du programme en matière informatique sont modestes, un entraînement relativement rapide de chaque enseignant devrait lui permettre de remplir son contrat.
L'enseignant est libre de l'approche culturelle du contenu mathématique de ce programme, approche qui doit tenir compte de la spécificité de cette série.

Le programme est présenté en quatre chapitres afin d'en faciliter la lecture; mais ces quatre chapitres s'interpénètrent de façon naturelle et l'enseignant a toute liberté de combiner autrement les différents contenus pour construire une progression. Quelques pistes sont proposées dans la suite de ce document.

Le chapitre « Information chiffrée »

Les élèves sont régulièrement confrontés à des informations chiffrées produites par d'autres : journalistes, historiens, géographes, économistes, etc. Ce chapitre vise à développer la démarche intellectuelle indispensable pour appréhender des données numériques, pour les déchiffrer avec précision et pour en comprendre le sens, la portée et les limites.

Pourcentages

On entretiendra les compétences acquises antérieurement sur le coefficient multiplicatif associé à un pourcentage d'évolution et on dégagera l'intérêt de ce coefficient dans les augmentations ou diminutions successives dont la formulation additive est parfois trompeuse. On pourra utiliser les tableurs pour illustrer que 10 accroissements de 0,2 %, par exemple, peuvent être considérés comme un accroissement de 2 %, alors que 10 accroissements de 10 % ne peuvent pas être considérés comme un accroissement de 100 %. Les calculs de prix hors taxes, de prix avant une réduction ou de pourcentages moyens d'évolution (sur trois ou quatre valeurs en utilisant la racine carrée ou cubique) seront autant d'occasions de montrer l'intérêt du coefficient multiplicatif.
On s'intéressera, sur des exemples, à différentes explications de la variation d'un pourcentage (variation de l'ensemble de référence ou de la partie étudiée); on observera que l'ordre des pourcentages rapportés à des ensembles de référence différents n'est pas toujours identique à celui des données absolues; enfin, on calculera des pourcentages de pourcentages en relation avec l'étude des tableaux croisés.

Feuilles automatisées de calcul

Non dédiés à un domaine spécifique, les tableurs sont des logiciels généralistes, les plus utilisés avec les traitements de texte. Les feuilles de calcul qui apparaissent à l'écran sont des tableaux dont les cases ne sont généralement pas remplies une à une; le plus souvent, leur construction résulte en partie de l'application de formules mathématiques définies par l'utilisateur ou données par le logiciel. Travailler sur des feuilles automatisées de calcul est donc un moyen pour l'élève, d'une part, de revenir sur les notions de variables et de fonctions introduites en seconde et de faire fonctionner des formules, et, d'autre part, de s'approprier un outil très répandu.
Dans un premier temps, on explorera une feuille de calcul déjà réalisée et on identifiera les liens entre diverses cellules. Sur une feuille de facturation, par exemple, comportant des prix unitaires hors taxes, des effectifs ou des quantités, des prix partiels hors taxes, des taux de taxes, des montants hors taxes, des montants de taxe et des montants TTC, on pourra découvrir ces liens de façon dynamique et analyser les modifications entraînées par la modification d'une valeur.
Dans un deuxième temps, on réalisera une telle feuille à partir d'un document comportant les données nécessaires et quelques règles simples comme l'affichage de certains montants partiels, le regroupement de données d'un certain type, etc. À l'occasion de ce travail, les élèves utiliseront les possibilités de dénomination de certaines cellules et la recopie de formules; cet apprentissage sera réinvesti dans le chapitre « Exemples de types de croissance », p. 36.
L'objectif n'est pas d'étudier un tableur, mais de pouvoir utiliser un tableau dynamique pour résoudre des problèmes mettant en jeu des calculs corrélés, explorer des suites, simuler des phénomènes aléatoires élémentaires. Dans l'environnement où il

aura travaillé, l'élève devra savoir éditer une formule élémentaire, recopier une cellule ou une formule, utiliser un adressage relatif ou absolu, mettre en œuvre quelques fonctions élémentaires disponibles (tirage aléatoire, maximum, minimum, partie entière, somme, moyenne, écart type, condition du type *si… alors, etc.*), insérer un graphique. Pour exploiter certaines simulations, l'élève pourra trouver avantage à utiliser d'autres fonctions intégrées simples (telles que dénombrement conditionnel ou contrôle de parité).

Représentations graphiques

Ce travail est une reprise de celui effectué en classe de seconde à propos des représentations graphiques de fonctions : lecture d'une valeur, d'un extremum, de variations, *etc*. Les élèves devront savoir interpréter, correctement et avec les réserves nécessaires, les informations lisibles sur un graphique ; ils se souviendront en particulier qu'une lecture graphique ne donne le plus souvent que des valeurs approchées. L'utilisation de changements de fenêtre graphique permettra la recherche d'une approximation d'un extremum ou d'une solution d'une équation. Des exemples de changements de fenêtre graphique modifiant complètement l'allure d'une courbe inciteront les élèves à garder un esprit critique par rapport aux lectures graphiques. En liaison avec des exemples de types de croissance, tels que ceux que les économistes utilisent, on développera la lecture qualitative de courbes : description des variations, reconnaissance du ralentissement ou de l'accélération de la croissance ou de la décroissance d'une fonction, comparaison de représentations graphiques.
Sur quelques exemples bien choisis, on travaillera la lecture d'informations et la reconnaissance d'une surface à partir de lignes de niveaux ; on initiera à ce propos au repérage de points par trois coordonnées. L'objectif est de proposer ici quelques lectures élémentaires de données en dimension trois.

Arbres et diagrammes

On aura pu, lors de travaux sur les pourcentages, exploiter quelques représentations ensemblistes. Il s'agit ici de faire percevoir l'utilité d'une organisation en tableau ou en arbre, pour résoudre des problèmes simples de dénombrement. Ce thème pourra être l'occasion d'une réflexion plus spécifique sur le *et*, le *ou*, voire le *si… alors, etc.*

Le chapitre « Statistique »

Ce chapitre se divise en trois parties. Dans la première, l'objectif est de voir sur des exemples qu'une question peut trouver une réponse dans le champ de la statistique sous réserve, éventuellement, de transformer la question initiale. À partir de cette nouvelle question, on réfléchira simultanément sur les données à recueillir et sur le traitement statistique que l'on peut envisager pour ces données.

Exemples

Considérons la question : *Quel est le nombre de battements cardiaques à la minute ?* La question est trop imprécise et il convient au moins de spécifier si c'est au repos ou après un effort clairement défini. Il peut se poser alors de nouvelles questions : sur la comparaison des données au repos ou après effort, par exemple. Les élèves peuvent aussi proposer que chacun étudie son propre pouls en faisant plusieurs mesures (il y a alors à la fois la variabilité individuelle de la fréquence cardiaque et les erreurs de mesure qui s'ajoutent) ou faire une étude sur une classe entière.

Considérons une autre question : *Sait-on estimer à l'œil une longueur ?* Cette question est, elle aussi, trop imprécise. Au niveau de la population visée, s'adresse-t-on à des gens de tous âges ? de tous métiers ? Par ailleurs, que signifie « estimer une longueur » ? S'agit-il de petites longueurs ou de grandes distances ? Lorsque cette situation a été expérimentée dans des classes, la question initiale s'est transformée pour devenir par exemple : *Si on demande à un élève de première de couper 20 cm d'une ficelle sans appareil de mesure, que se passe-t-il ?* On peut alors mettre en place un protocole expérimental qui permettra d'observer des données liées à cette question.

L'objectif est donc ici de montrer la diversité des questions qui se posent ainsi que le soin nécessaire à la définition et au recueil des données. Il s'agit aussi de montrer aux élèves qu'une première expérience permet de préciser et de reformuler la question initiale et que, si l'on veut apporter des réponses, généraliser ce qui est fait et interpréter des différences, il faut faire un traitement statistique plus sophistiqué et tenir compte en particulier de la fluctuation d'échantillonnage. Le résumé des données observées pourra se faire à l'aide de diagrammes en boîtes (souvent appelés boîtes à moustaches ou boîtes à pattes), éventuellement accompagnés de la moyenne ou d'une moyenne élaguée.

On trouvera à la fin de ce document une annexe relative aux diagrammes en boîtes donnant toutes les indications nécessaires sur les paramètres utiles (médianes, quartiles), sur les modes de construction de ces diagrammes, ainsi que sur leur utilisation. L'essentiel, dans un tel diagramme, est la construction de la boîte contenant la moitié des valeurs de la série ; pour les « moustaches », on pourra choisir les premier et neuvième déciles ou les valeurs extrêmes, comme l'indique l'annexe citée : en première L, on privilégiera l'utilisation des valeurs extrêmes ; dans tous les cas, les élèves devront légender leur schéma. Le tableur servira avant tout ici à ordonner les valeurs de la série observée et éventuellement à les numéroter : les élèves effectueront ensuite « à la main » le calcul de la médiane et des quartiles ainsi que la construction de la boîte.

Dans la seconde partie, on pourra d'abord définir l'écart type d'une série. On remarquera que l'écart type et la moyenne sont sensibles aux valeurs extrêmes alors que la médiane et l'écart interquartile ne le sont pas. On travaillera ensuite selon l'esprit décrit dans l'annexe ci-dessous relative aux données gaussiennes.

La troisième partie est consacrée à l'étude de tableaux croisés. On trouvera dans le document d'accompagnement de première ES (page 12 et suivantes) quelques exemples d'études de tableaux à double entrée. On s'intéressera aussi à des situations pour lesquelles l'enseignant sait qu'il n'y a pas indépendance entre les deux caractères qualitatifs étudiés sur la population (tableaux présentés lors d'élections, par exemple). Cette partie pourrait aussi bien figurer dans le chapitre « Information chiffrée » : elle a été mise dans le chapitre « Statistique » afin que l'enseignant puisse indiquer (sans le justifier) que les fluctuations des distributions des fréquences d'une ligne à l'autre (resp. d'une colonne à l'autre) sont éventuellement d'une ampleur que la fluctuation d'échantillonnage ne peut seule expliquer.

Le travail réalisé dans ce chapitre sera rédigé dans le cahier de statistique commencé en seconde.

Le chapitre « Exemples de types de croissance »

L'objectif de ce chapitre est d'apprendre aux élèves à reconnaître les divers types de croissance qui peuvent affecter certains phénomènes, à les différencier et à les nommer.

Les diverses notions du chapitre seront mises en œuvre avant tout avec des suites concernant des phénomènes mesurés à des dates ou des instants différents (séries chronologiques) : ce sont celles qui apparaissent le plus souvent dans l'information chiffrée fournie par les médias.

L'étude de quelques exemples bien choisis (phénomènes augmentant chaque année d'une même quantité, ou augmentant à taux constant) amènera aux notions de suites arithmétiques ou géométriques : la croissance sera dite linéaire dans le premier cas, exponentielle dans l'autre. Pour chacun des deux types, les élèves devront savoir reconnaître la nature de la suite à partir de la relation entre deux termes consécutifs, calculer les termes successifs de la suite et exprimer le terme d'indice n en fonction du terme initial.

Les termes *raison* et *relation de récurrence* (utilisés ci-dessous par commodité) pourront être employés dans la classe : on s'attachera plus au sens qu'ils véhiculent qu'à leurs définitions formelles. La notation indicielle est d'un usage fréquent en statistique ou dans d'autres disciplines : les élèves la rencontreront et il faut donc qu'ils la comprennent ; l'enseignant pourra néanmoins privilégier la notation fonctionnelle en usage systématique dans les calculatrices et les ordinateurs.

L'utilisation d'un tableur est particulièrement bienvenue ici. Le calcul des termes d'une suite définie par récurrence y est immédiat et la notion de récurrence prend tout son sens ; la mise en place de ce type de calcul, est par ailleurs, très révélatrice du mode de fonctionnement d'un tableur. On peut ensuite aisément placer sur des colonnes côte à côte des suites différant soit par le terme initial, soit par la raison, soit par la nature de la relation de récurrence : les comparaisons sont alors faciles à faire et les différences de comportement apparaissent aisément. Le tableur permet aussi de donner instantanément une représentation graphique d'une ou plusieurs suites de nombres : les notions de croissance linéaire et exponentielle sont visualisées graphiquement. De telles manipulations font émerger des questions et permettent de trouver des réponses ; par exemple, dans l'étude d'une suite, on pourra calculer automatiquement la différence entre deux termes consécutifs et/ou le coefficient multiplicateur et observer ce qui se passe. La lecture critique de documents issus des médias et décrivant des phénomènes de croissance pourra susciter questions et expérimentations.

Le tableur permet de simuler facilement d'autres types de croissance avec des suites également définies par une relation de récurrence ; l'exemple de suites ayant des différences secondes constantes, proposé par le programme, permet des prolongements intéressants : le choix de bons premiers termes (0, 1 et 4) amène à la suite (n^2) ; le travail peut être poursuivi avec d'autres choix des premiers termes. L'intérêt de telles suites est multiple : ce travail met en évidence des comportements qui ne sont ni linéaires, ni exponentiels ; ce type de suites peut être présenté comme une extension des suites arithmétiques (lesquelles sont à différence première constante, et donc à différence seconde nulle) et un premier intermédiaire entre les suites arithmétiques et géométriques (ces dernières n'ayant jamais de différences secondes ni troisièmes… constantes). L'utilisation du tableur rend ces suites immédiatement accessibles, permet une visualisation graphique frappante et facilite la compréhension de l'importance des conditions initiales ; ce travail permet, par ailleurs, d'intégrer une dimension historique, par exemple à travers les travaux de Galilée.

Qu'appelle-t-on différences premières et différences secondes d'une suite ?
Le tableau suivant donne la réponse :

Suite $u(n)$	$u(0)$	$u(1)$	$u(2)$	$u(3)$	$u(4)$
Différence première $\Delta(n)$	$\Delta(0)= u(1)-u(0)$	$\Delta(1)= u(2)-u(1)$	$\Delta(2)= u(3)-u(2)$	$\Delta(3)= u(4)-u(3)$	…
Différence seconde	$\Delta(1) - \Delta(0)$	$\Delta(2) - \Delta(1)$	$\Delta(3) - \Delta(2)$	$\Delta(4) - \Delta(3)$	…

Texte de Galilée : extrait des *Dialogues*, « Deuxième journée : loi de la chute des corps. »

« L'accélération du mouvement rectiligne des corps pesants se fait selon les nombres impairs en commençant par un, c'est-à-dire que si l'on prend des intervalles de temps égaux et si dans le premier intervalle, partant du repos, le mobile a accompli un certain parcours, par exemple une aune, dans le second intervalle il en parcourra trois, dans le troisième, cinq, dans le quatrième sept et ainsi selon les nombres impairs successifs. C'est en somme la même chose de dire que les espaces parcourus par le mobile, partant du repos, sont en raison du carré des temps dans lesquels les espaces ont été parcourus. »

Voir Galilée. Opere di Galileo Galilei *édité par A. Favaro chez C. Barbera, Florence, 1890-1909, nouvelle édition en 1964, cité dans : R. Zouckerman,* Galilée penseur libre, *Édition de l'Union rationaliste, 1968.*

On notera enfin le lien étroit entre le premier chapitre et celui-ci concernant les pourcentages, lectures graphiques et tableurs.

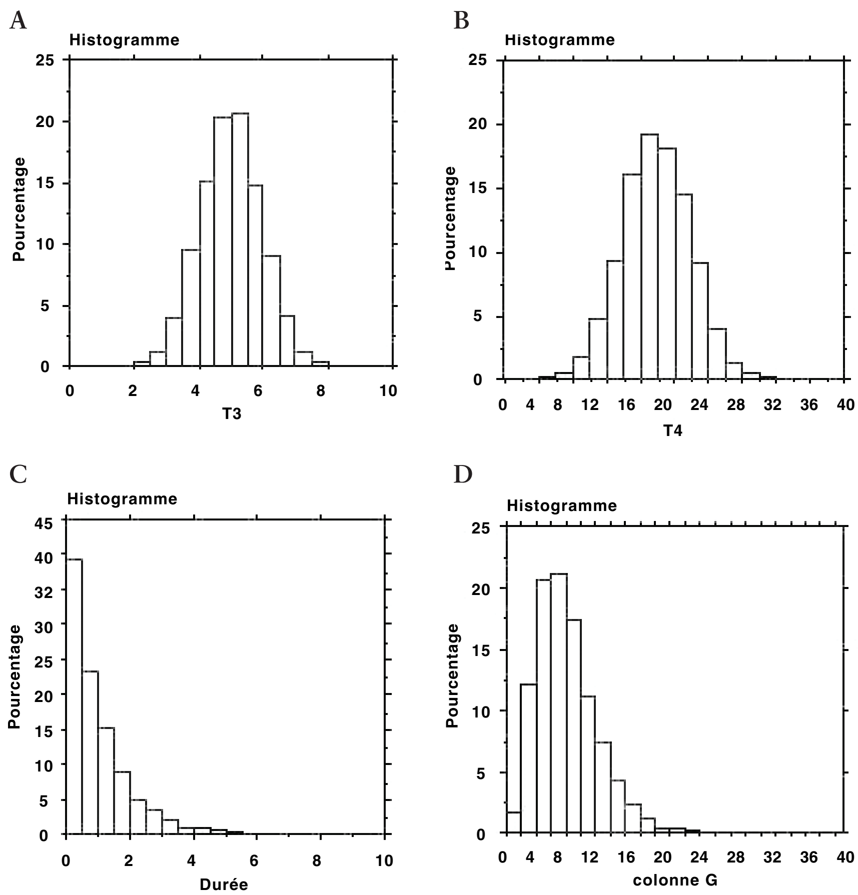
Le chapitre « Activités d'ouverture »

Deux activités dites d'ouverture sont proposées : il s'agit de maintenir pour les élèves désirant choisir l'option mathématique en classe terminale une pratique (modeste) des figures géométriques et d'éveiller leur curiosité sur des contenus dépassant la *culture minimale en mathématiques,* évoquée au début de ce document.
Les commentaires du programme justifient le choix de la première activité; il reste à souligner l'intérêt d'un traitement informatique pour le dessin, pour des calculs d'aires et de périmètres aux diverses étapes de l'itération et pour la mise en évidence de comportements limites.
Comme l'indique le programme, le contenu de ce dernier chapitre ne sera pas pris en compte pour l'épreuve anticipée de mathématiques au baccalauréat et pourra n'être traité que par une partie de la classe.

Annexe : à propos des données gaussiennes

Exemple 1 : bilan de santé

Pour faire le bilan de l'activité thyroïdienne d'un individu, on mesure les quantités de « T3 libre » (tri – iodo thyronine libre) et « T4 libre » (thyroxine libre) ; ces mesures sont exprimées en pmol/litre (pmol signifie pico-mole, soit 10^{-12} mole, une mole étant composée d'environ $6{,}02.10^{23}$ molécules). Les résultats de deux séries de 5 000 mesures chez des individus dont la thyroïde fonctionne normalement sont résumés par les histogrammes A et B ; ces histogrammes ont la même allure dite en cloche, nettement différente de celle des histogrammes C et D (ces deux derniers correspondent à des données simulées).



Les deux séries obtenues lors de ces bilans thyroïdiens correspondent à des « données gaussiennes » ; pour de telles données on peut déterminer un modèle (modèle gaussien) à partir de deux paramètres m et σ calculés sur une série de référence aussi longue que possible :

– la moyenne m de la série de référence : $m = \frac{1}{n}\sum x_i$

– l’écart type de la série de référence : $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\left(x_i - m\right)^2}$

Pour les mesures de T4L, on trouve sur la série de référence (ici de taille 5 000) :

$m = 16{,}7$ et $\sigma = 4{,}0$ (les unités étant des pmol/litre).

Pour les mesures de T3L, on trouve sur la série de référence (ici de taille 5 000) :

$m = 4{,}9$ et $\sigma = 0{,}9$ (les unités étant des pmol/litre).

À partir de ce modèle, on montre que pour des mesures ultérieures de données analogues :
– environ 68 % des mesures sont dans l’intervalle $[m - \sigma ; m + \sigma]$; environ 16 % seront inférieures à $(m - \sigma)$ et environ 16 % seront supérieures à $(m + \sigma)$;
– environ 95 % des mesures sont dans l’intervalle $[m - 2\sigma ; m + 2\sigma]$; environ 2,5 % seront inférieures à $(m - 2\sigma)$ et environ 2,5 % seront supérieures à $(m + 2\sigma)$;
– environ 99,8 % des mesures sont dans l’intervalle $[m - 3\sigma ; m + 3\sigma]$; environ 0,1 % seront inférieures à $(m - 3\sigma)$ et environ 0,1 % seront supérieures à $(m + 3\sigma)$.

Dans l’exemple des analyses biologiques de dosages de T3L et T4L, et dans de nombreux examens, l’intervalle $[m - 2\sigma ; m + 2\sigma]$ est appelé « plage de normalité » : il contient environ 95 % des valeurs observées chez des individus non-malades. Les plages de normalité sont ici :

– [3,1 ; 6,7] pour le dosage de T3L ;

– [9,7 ; 25,7] pour le dosage de T4L.

(Les plages de normalité sont indiquées par les laboratoires sur les comptes rendus d’analyse biologique. Ces plages de normalité sont voisines mais pas nécessairement identiques d’un laboratoire à l’autre ; elles sont en effet calculées à partir de séries de référence traitées par l’appareil de mesure du laboratoire.)

Si on faisait des dosages de T3L chez des personnes choisies au hasard dans une population donnée, environ une sur vingt aurait une valeur sortant de la plage de normalité. Cela dit, les personnes à qui l’on fait de tels dosages (les individus de la série de référence mis à part) ne sont pas choisies au hasard et présentent en général des symptômes justifiant cet examen ; sortir de la plage de normalité constitue un symptôme de plus en faveur d’une maladie de la thyroïde (symptôme d’autant plus marqué que l’on s’éloigne beaucoup de la moyenne : il est classique pour certaines pathologies de dépasser la moyenne de dix écarts types).

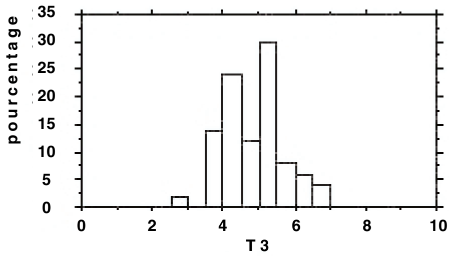
Exemple 2 : taille

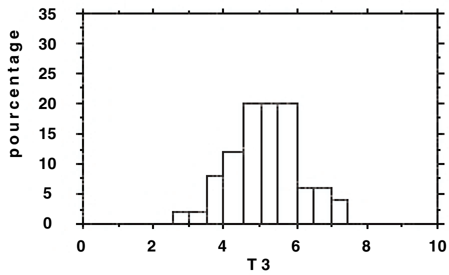
Les tailles de garçons (resp. de filles) nés la même année constituent des données gaussiennes, et les courbes situées à la fin du carnet de santé des enfants donnent, entre autres, pour chaque âge une plage de normalité égale à $[m - 2\sigma ; m + 2\sigma]$, où les paramètres m et σ pour un âge donné sont calculés sur des séries de référence (malheureusement, ces séries sont anciennes et ne sont plus vraiment des séries de référence pour les enfants qui naissent aujourd’hui). On notera que dans la population concernée par la série de référence, pour chaque âge, environ un individu sur vingt sort de la plage de normalité.

Commentaires

L’objectif essentiel du paragraphe relatif aux données gaussiennes est de faire comprendre, à partir d’exemples, d’une part, le type d’information qu’apporte l’écart type et, d’autre part, la notion de plage de normalité, en particulier pour une lecture correcte de certains examens biologiques ou des courbes de croissance présentes dans les carnets de santé.
On s’est longtemps demandé pourquoi de nombreuses données (mesures biologiques, erreurs de mesure) pouvaient être qualifiées de « gaussiennes » ; un théorème de mathématiques appelé « théorème central limite » en propose une explication. Ce théorème est totalement hors programme. De même, est totalement hors programme la reconnaissance du caractère gaussien de données : on dira aux élèves que des études statistiques ont prouvé qu’il en était ainsi et on leur apprendra simplement à comprendre et utiliser cette information.

On sera attentif à la formulation des conclusions : la normalité évoquée ici est une normalité statistique et il y a une chance sur vingt pour qu'un individu « normal » choisi au hasard soit en dehors de la plage de normalité ! De même, un échantillon de petite taille pris au hasard peut s'écarter sensiblement de la forme « en cloche », comme le montrent les deux histogrammes ci-dessous relatifs à deux échantillons de taille cinquante, pris au hasard dans la série de l'exemple 1.





On pourra prolonger la réflexion en simulant, par exemple, la situation suivante où n personnes choisies au hasard dans une population de gens en parfaite santé subissent quatre examens médicaux indépendants : on constate alors qu'environ une personne sur cinq a au moins un examen qui sort de la plage de normalité ! Pour faire cette simulation avec une calculatrice, il suffit de disposer de huit chiffres au hasard, de les prendre deux par deux pour fabriquer quatre nombres entre 00 et 99, puis de compter 1 si l'un au moins de ces quatre nombres est supérieur ou égal à 95, 0 sinon ; la proportion de 1 est de l'ordre de 1/5 !