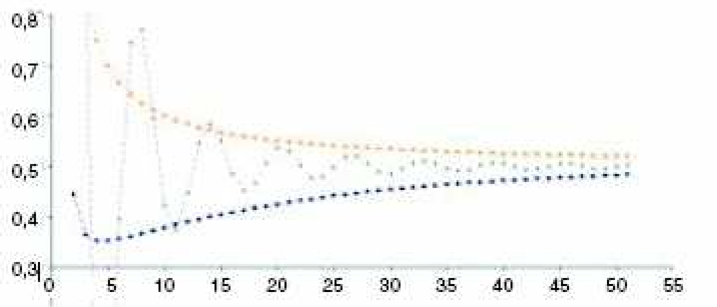
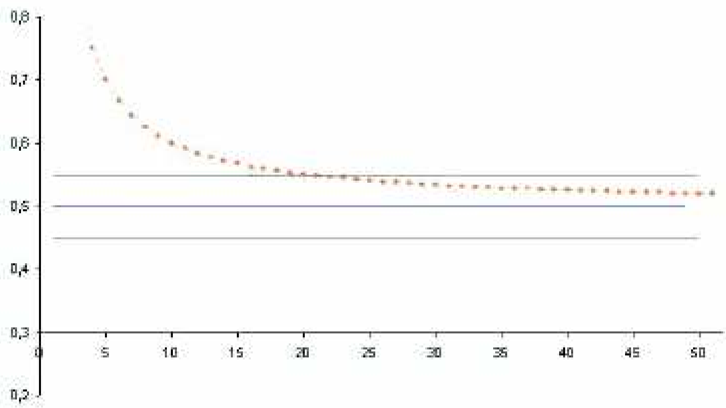
Théorème des gendarmes : Soit (u_n), (w_n) et (v_n) trois suites de réels définies dans **N** telles que,
si les suites (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite ℓ à partir d'un certain rang, $u_n \le w_n \le v_n$, alors la suite (w_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$.

Démonstration : Soit $r > 0$, à partir d'un certain rang, on a $\ell - r < u_n < \ell + r$.
De même à partir d'un certain rang, on a $\ell - r < v_n < \ell + r$.
Donc à partir d'un certain rang, $\ell - r < u_n \le w_n \le v_n < \ell + r$.
Finalement on a, pour n assez grand $\ell - r < w_n < \ell + r$.

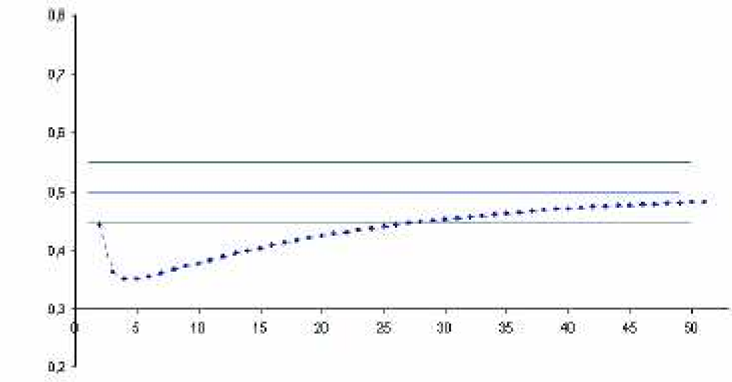
La suite (w_n) — en noir — est encadrée à partir d'un certain rang (le rang 14) par la suite (u_n) — en bleu — et par la suite (v_n) — en orange.



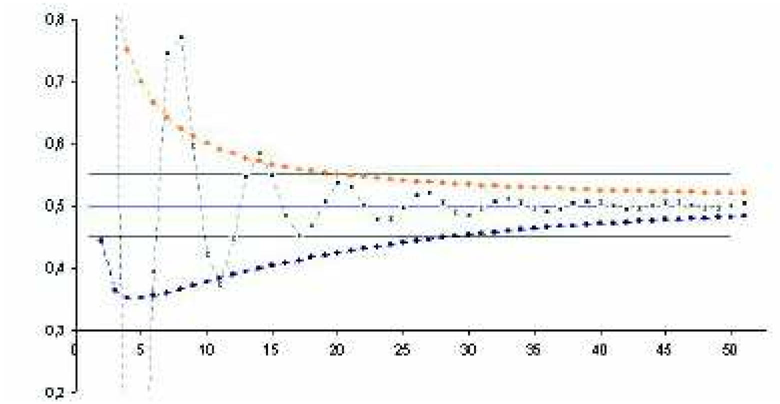
On se donne un « tuyau» centré sur $\ell = 0{,}5$ (ici c'est le « tuyau» $]0{,}45\ ;\ 0{,}55[$).
À partir d'une certain rang (ici 20), tous les v_n rentrent dans le « tuyau » (car (v_n) converge vers ℓ).



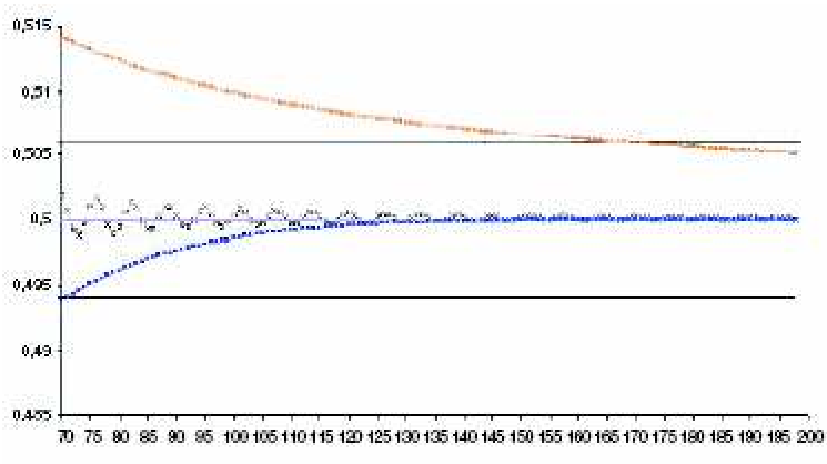
De même, à partir d'un certain rang (ici 30), tous les u_n rentrent dans le « tuyau » (car (u_n) converge vers ℓ).



D'où, à partir d'un certain rang (le rang 30), tous les w_n rentrent dans le « tuyau ».



Ceci marche pour n'importe quel « tuyau », par exemple pour le « tuyau plus fin» $]0,495\ ;\ 0,505[$.



Exemple : *Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = 7 + \dfrac{\sin n}{n}$ converge vers 7.*

Comme pour tout n entier naturel, $-1 \leq \sin n \leq 1$, alors $7 - \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq 7 + \dfrac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(7 - \dfrac{1}{n}\right) = 7$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(7 + \dfrac{1}{n}\right) = 7$.

D'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7}$.