CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 1	
Aire minimale d'un parallélogramme	***Pour le 2 octobre 2009***

Partie 1

Voir le fichier en cliquant ici

Partie 2

1) **Il semble que l'aire de *IJKL* soit minimale lorsque $x = 4$.**

2) **Il semble que l'aire de *IKJL* soit égale à la moitié de l'aire du rectangle *ABCD* lorsque $t = 3{,}5$ ou $t = 4{,}5$.**

Partie 3 : Justification mathématique

1) a) $x = BI$. Or I se déplace sur le segment $[AB]$ qui a pour longueur 7.

Par conséquent, **l'intervalle des valeurs possibles pour *x* est $[0\ ;\ 7]$.**

2) • Dans le triangle rectangle *ALI*, d'après le théorème de Pythagore, $LI^2 = AL^2 + AI^2$.
Or $AL = x$ et $AI = AB - BI = 7 - x$. D'où : $LI^2 = x^2 + (7-x)^2 = 2x^2 - 14x + 49$.

Par suite, $LI = \sqrt{2x^2 - 14x + 49}$.

• Dans le triangle rectangle *BIJ*, d'après le théorème de Pythagore, $JI^2 = BI^2 + BJ^2$.
Or $BI = x$ et $BJ = BC - CJ = 9 - x$. D'où : $JI^2 = x^2 + (9-x)^2 = 2x^2 - 18x + 81$.

Par suite, $JI = \sqrt{2x^2 - 18x + 81}$.

• Dans le triangle rectangle *CKJ*, d'après le théorème de Pythagore, $KJ^2 = CK^2 + CJ^2$.
Or $CJ = x$ et $CK = CD - DK = 7 - x$. D'où : $CK^2 = (7-x)^2 + x^2 = 2x^2 - 14x + 49$.

Par suite, $CK = \sqrt{2x^2 - 14x + 49}$.

• Dans le triangle rectangle *DKL*, d'après le théorème de Pythagore, $KL^2 = DL^2 + DK^2$.
Or $DL = DA - AL = 9 - x$ et $DK = x$. D'où : $KL^2 = (9-x)^2 + x^2 = 2x^2 - 18x + 81$.

Par suite, $KL = \sqrt{2x^2 - 18x + 81}$.

• Comme *KJIL* est un quadrilatère non croisé ayant ses côtés opposés de même longueur, alors **le quadrilatère *IJKL* est un parallélogramme**.

3) L'aire de *IJKL* est égale à l'aire du rectangle *ABCD* moins les aires de deux rectangles : un de dimensions *CK* et *CJ*, l'autre de dimensions *BJ* et *BI*.
Alors $f(x) = 9 \times 7 - CK \times CJ - BJ \times BI = 63 - (7-x)x - (9-x)x = 63 - 7x + x^2 - 9x + x^2$.

Par conséquent, $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 16x + 63}$.

4) a) $2(x-4)^2 + 31 = 2(x^2 - 8x + 16) + 31 = 2x^2 - 16x + 32 + 31 = 2x^2 - 16x + 63$.

Par conséquent, **pour tour réel *x*, $\boldsymbol{f(x) = 2(x-4)^2 + 31}$.**

C. Lainé

b) Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a < b \leq 4$.
Comme la fonction $x \mapsto x-4$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ 4]$, alors $-4 \leq a-4 < b-4 \leq 0$.
Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $[-4\ ;\ 0]$, alors $16 \geq (a-4)^2 > (b-4)^2 \geq 0$.
Comme la fonction $x \mapsto 2x+31$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ 16]$, alors $63 \geq 2(a-4)^2+31 > 2(b-4)^2+31 \geq 31$, c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.
Par conséquent, **si $0 \leq a < b \leq 4$, alors $f(a) > f(b)$**.
On en déduit que **f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 4]$**.

c) Soient a et b deux réels tels que $4 \leq a < b \leq 7$.
Comme la fonction $x \mapsto x-4$ est strictement croissante sur $[4\ ;\ 7]$, alors $0 \leq a-4 < b-4 \leq 3$.
Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ 3]$, alors $0 \leq (a-4)^2 < (b-4)^2 \leq 9$.
Comme la fonction $x \mapsto 2x+31$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ 9]$, alors $31 \leq 2(a-4)^2+31 < 2(b-4)^2+31 \leq 49$, c'est-à-dire $f(a) < f(b)$.
Par conséquent, **si $4 \leq a < b \leq 7$, alors $f(a) < f(b)$**.
On en déduit que **f est strictement croissante sur $[4\ ;\ 7]$**.

d) Comme la fonction f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 4]$ et strictement croissante sur $[4\ ;\ 7]$, alors **f admet un minimum 31 atteint en $x = 4$**.

On en déduit que **l'aire minimale de *IJKL* est égale à 31 lorsque $x = 4$**.

5) Voir graphique à la page suivante.

6) a) La moitié de l'aire du rectangle $ABCD$ est égale à 31,5.
Traçons la droite d'équation $y = 31{,}5$; on remarque que cette droite et la courbe (C_f) se coupent en deux points d'abscisses 3,5 et 4,5.
Il y a donc **deux possibilités pour que l'aire du quadrilatère *IJKL* soit égale à la moitié de l'aire du rectangle *ABCD***.

b) Résolvons l'équation $f(x) = 31{,}5$.

Or $f(x) = 31{,}5$ équivaut à $2(x-4)^2+31 = 31{,}5$, c'est-à-dire à $2(x-4)^2 = 0{,}5$ ou encore à $(x-4)^2 = 0{,}25$.

D'où $f(x) = 31{,}5$ équivaut à $\begin{cases} x-4 = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \\ x-4 = -\sqrt{0{,}25} = -0{,}5 \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} x = 4{,}5 \\ x = 3{,}5 \end{cases}$.

Par conséquent, **l'aire du quadrilatère *IJKL* soit égale à la moitié de l'aire du rectangle *ABCD* lorsque $x = 3{,}5$ ou $x = 4{,}5$**.

C. Lainé