CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 2

Généralités sur les fonctions	***Pour le 9 octobre 2009***

1) On peut remarquer que $g = -4 \times v \circ u$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = \frac{1}{x}$.

La fonction u est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ -1[$ et dans ce cas $u(x) \in\ ]-\infty\ ;\ 0[$.

La fonction v est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

D'où $v \circ u$ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ -1[$.

Comme $-4 < 0$, on en déduit que **la fonction g est strictement croissante sur $]-\infty\ ;-1[$**.

La fonction u est strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et dans ce cas $u(x) \in\ ]0\ ;\ +\infty[$.

La fonction v est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

D'où $v \circ u$ est strictement décroissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

Comme $-4 < 0$, on en déduit que **la fonction g est strictement croissante sur $]-1\ ;+\infty[$**.

2) Soit x un réel différent de -1.

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}.$$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \\ b + c = -3 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \\ b + c = -3 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 - a = 1 \\ c = -3 - b = -4 \end{cases}$.

Par conséquent, **pour tout réel x différent de -1, $f(x) = x + 1 - \frac{4}{x+1}$**.

3) On remarque que $f = u + g$.

Comme les fonctions u et g sont strictement croissantes sur $]-\infty\ ;\ -1[$ et sur $]-1\ ;\ +\infty[$,

alors **$f = u + g$ est strictement croissante sur $]-\infty\ ;-1[$ et sur $]-1\ ;+\infty[$**.

4) a) • Les abscisses des points d'intersection $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire de l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Or $x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 1 - 3 = (x+1)^2 - 4 = [(x+1)+2][(x+1)-2] = (x+3)(x-1)$.

Alors $x^2 + 2x - 3 = 0$ équivaut à $x + 3 = 0$ ou $x - 1 = 0$, c'est-à-dire à $x = -3$ ou $x = 1$.

Donc **les points d'intersection $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(-3\ ;\ 0)$ et $(1\ ;\ 0)$**.

• Le point d'intersection $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées a pour abscisse 0.

Or $f(0) = \frac{0^2 + 2 \times 0 - 3}{0 + 1} = -3$.

Donc **le point d'intersection $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0\ ;-3)$**.

C. Lainé

b) L'ensemble de définition est centré en -1.

$$f(-1+x)+f(-1-x)=\frac{(-1+x)^2+2(-1+x)-3}{(-1+x)+1}+\frac{(-1-x)^2+2(-1-x)-3}{(-1-x)+1}$$
$$=\frac{x^2-2x+1-2+2x-3}{x}+\frac{x^2+2x+1-2-2x-3}{-x}$$
$$=\frac{x^2-4}{x}+\frac{x^2-4}{-x}$$
$$=\frac{x^2-4}{x}-\frac{x^2-4}{x}$$
$$=0=2y_A$$

Par conséquent, **le point $A(-1\ ;\ 0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$** .

c)