CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 3

Barycentres	**Pour le 23 octobre 2009**

1) Soit H le barycentre des des points pondérés $(A,\ 1)$, $(B,\ 1)$, $(C,\ 1)$ et $(D,\ 5)$.
Pour tout point M du plan, d'après la propriété fondamentale, on obtient :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+5\ \overrightarrow{MD}=8\ \overrightarrow{MH} \quad \textbf{[1]}$$

Prenons $M=O$, alors $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+5\ \overrightarrow{OD}=8\ \overrightarrow{OH}$, ou encore
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+4\ \overrightarrow{OD}=8\ \overrightarrow{OH}$.
Or O est le centre du carré $ABCD$, alors $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
On en déduit que $4\ \overrightarrow{OD}=8\ \overrightarrow{OH}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OD}=2\ \overrightarrow{OH}$.
Donc H est le milieu de $[OD]$.
Par conséquent, **le barycentre $\boldsymbol{H}$ des points pondérés $\boldsymbol{(A,\ 1)}$, $\boldsymbol{(B,\ 1)}$, $\boldsymbol{(C,\ 1)}$ et $\boldsymbol{(D,\ 5)}$ est le milieu du segment $\boldsymbol{[OD]}$**.

2) Dans le triangle OAD rectangle et isocèle en O (propriété du carré), d'après le théorème de Pythagore, $OD^2+OA^2=AD^2$, c'est-à-dire $2\ OA^2=AD^2$. Alors $OA^2=\dfrac{AD^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}$.

Donc $\boldsymbol{OD}=\sqrt{\dfrac{a^2}{2}}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}$.

3) a) D'après la relation **[1]**, $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+5\overrightarrow{MD}\right\|=2a\sqrt{2}$ équivaut à $\left\|8\ \overrightarrow{MD}\right\|=2a\sqrt{2}$.

Or $\left\|8\ \overrightarrow{MD}\right\|=2a\sqrt{2}$ équivaut à $8\ MD=2a\sqrt{2}$.

Donc M appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $8\ MD=2a\sqrt{2}$, c'est-à-dire si, et seulement si,

$MD=\dfrac{2a\sqrt{2}}{8}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Par conséquent, **l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\boldsymbol{D}$ et de rayon $\boldsymbol{\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}$**.

b) Soit K le barycentre des des points pondérés $(A,\ 1)$, $(B,\ 5)$, $(C,\ 1)$ et $(D,\ 1)$.
Pour tout point M du plan, d'après la propriété fondamentale, on obtient :

$$\overrightarrow{MA}+5\ \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=8\ \overrightarrow{MK} \quad \textbf{[2]}$$

Prenons $M=O$, alors $\overrightarrow{OA}+5\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=8\ \overrightarrow{OK}$, ou encore
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+4\ \overrightarrow{OB}=8\ \overrightarrow{OK}$.
Or O est le centre du carré $ABCD$, alors $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
On en déduit que $4\ \overrightarrow{OB}=8\ \overrightarrow{OK}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OB}=2\ \overrightarrow{OK}$.
Donc K est le milieu de $[OB]$.
Par conséquent, **le barycentre $\boldsymbol{K}$ des points pondérés $\boldsymbol{(A,\ 1)}$, $\boldsymbol{(B,\ 5)}$, $\boldsymbol{(C,\ 1)}$ et $\boldsymbol{(D,\ 1)}$ est le milieu du segment $\boldsymbol{[OB]}$**.

c) D'après les relations **[1]** et **[2]**, $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+5\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$ équivaut à $\left\|8\ \overrightarrow{MH}\right\|=\left\|8\ \overrightarrow{MK}\right\|$.

Or $\left\| 8\ \overrightarrow{MH} \right\| = \left\| 8\ \overrightarrow{MK} \right\|$ équivaut à $MH = MK$.

Par conséquent, **l'ensemble $\mathscr{F}$ est la médiatrice du segment $[HK]$**.

4) a) Comme G est le centre de gravité du triangle ABC, $OG = \frac{1}{3}OB$. Or $OB = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Comme O appartient à $[DG]$, alors $DG = DO + OG = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{4a\sqrt{2}}{6} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{DG = \frac{2a\sqrt{2}}{3}}$.

b) Comme O est le milieu de $[AC]$, alors O est l'isobarycentre des points A et C.

Pour tout point M du plan, d'après la propriété fondamentale, on obtient : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\ \overrightarrow{MO}$.

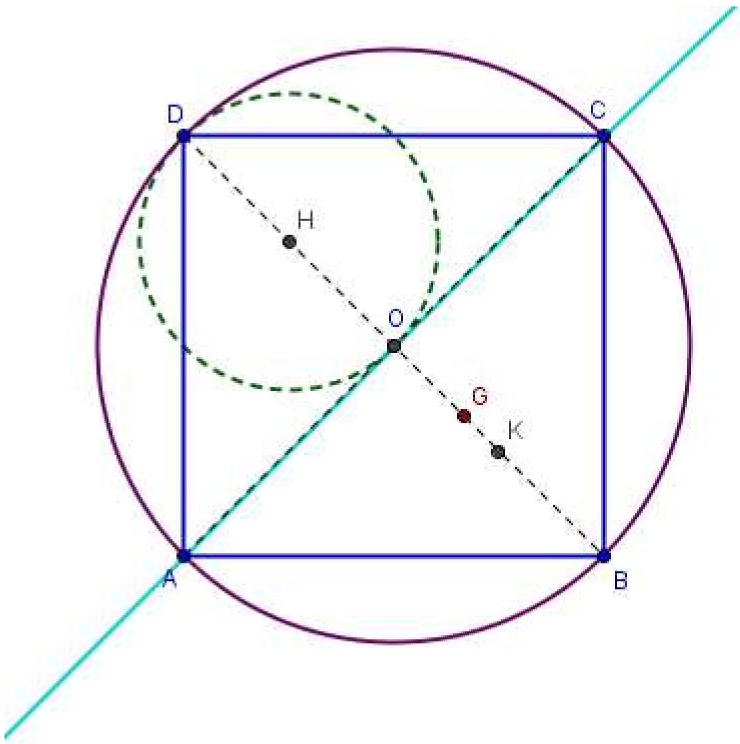
De plus, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\ \overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DM}\right) + \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DM}\right) + \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM}\right)$.

Alors $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\ \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.

Comme $ABCD$ est un carré, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$. Par suite, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\ \overrightarrow{MD} = 2\ \overrightarrow{DB}$.

On en déduit que $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\ \overrightarrow{MD} \right\| = 2 \left\| 2\ \overrightarrow{MO} \right\|$ équivaut à $4\ MO = 2\ DB$, c'est-à-dire à $MO = \frac{DB}{2} = DO$.

Par conséquent, **l'ensemble cherché est le cercle de centre O passant par D**.



C. Lainé