

# CORRECTION DU DEVOIR COMMUN N° 1

Généralités sur les fonctions  
et barycentres

Le 24 octobre 2009

## Exercice 1

1) On remarque que, pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = f(x-2) - 1$ .

On en déduit que  $\mathcal{C}_g$  est l'image de  $\mathcal{C}_f$  par la translation de vecteur  $\vec{u}(2; -1)$ .

2) Pour tout réel  $x$ ,  $h(x) = g(x - (-1)) + 1 = \left[ ((x+1) - 2)^2 - 1 \right] + 1 = (x-1)^2 - 1 + 1 = (x-1)^2$ .

## Exercice 2

$$1) ax + b + \frac{c}{x-3} = \frac{(ax+b)(x-3) + c}{x-3} = \frac{ax^2 - 3ax + bx - 3b + c}{x-3} = \frac{ax^2 + (-3a+b)x - 3b + c}{x-3}.$$

$$\text{Par identification, on obtient : } \begin{cases} a = 2 \\ -3a + b = -5 \\ -3b + c = 1 \end{cases}$$

$$\text{Or } \begin{cases} a = 2 \\ -3a + b = -5 \\ -3b + c = 1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 + 3a = -5 + 6 = 1 \\ c = 1 + 3b = 1 + 3 = 4 \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout réel  $x$  différent de 3,  $f(x) = 2x + 1 + \frac{4}{x-3}$ .

2) a) La fonction  $u$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

b) On peut remarquer que  $v = 4 \times g \circ h$  avec  $h(x) = x - 3$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

La fonction  $h$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 3[$  et dans ce cas  $u(x) \in ]-\infty; 0[$ .

La fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; 0[$ .

D'où  $g \circ h$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; 3[$ .

Comme  $4 > 0$ , on en déduit que la fonction  $v$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 3[$ .

La fonction  $h$  est strictement croissante sur  $]3; +\infty[$  et dans ce cas  $h(x) \in ]0; +\infty[$ .

La fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

D'où  $g \circ h$  est strictement décroissante sur  $]3; +\infty[$ .

Comme  $4 > 0$ , on en déduit que la fonction  $v$  est strictement croissante sur  $]3; +\infty[$ .

c) On ne peut pas en déduire le sens de variation de  $f$  car  $f$  est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

## Exercice 3

$G$  est le barycentre des points pondérés  $(A, a)$ ,  $(B, b)$  et  $(C, 2)$ , alors :

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + 2x_C}{a + b + 2} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + 2y_C}{a + b + 2} \end{cases}$$

$$\text{Or } \begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + 2x_C}{a+b+2} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + 2y_C}{a+b+2} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 3 = \frac{4b}{a+b+2} \\ 5 = \frac{6}{a+b+2} \end{cases}, \text{ c'est-à-dire à } \begin{cases} 3a+3b+6-4b=0 \\ 5a+5b+10-6=0 \end{cases}.$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + 2x_C}{a+b+2} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + 2y_C}{a+b+2} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 3a-b=-6 \\ 5a+5b=-4 \end{cases}.$$

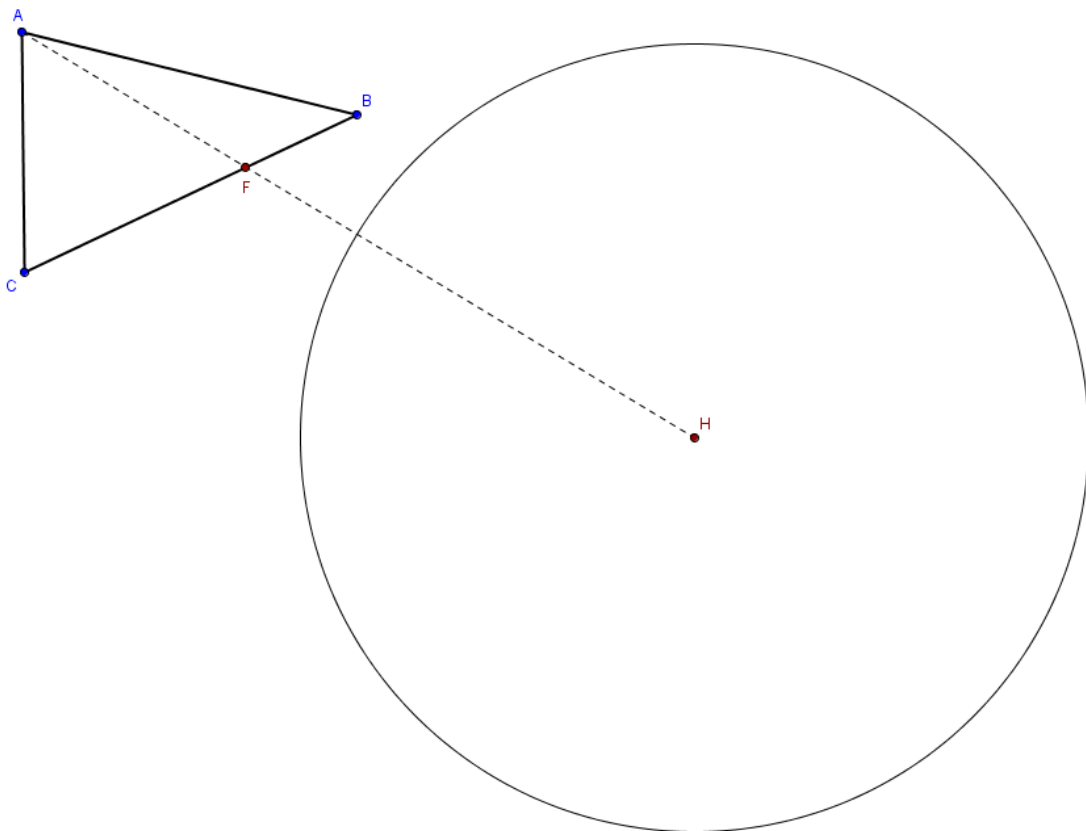
$$\begin{cases} 3a-b=-6 \\ 5a+5b=-4 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 15a-5b=-30 \\ 5a+5b=-4 \end{cases}, \text{ ou encore à } \begin{cases} 20a=-34 \\ b = \frac{-4-5a}{5} \end{cases}, \text{ c'est-à-dire à}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{34}{20} = -\frac{17}{10} \\ b = \frac{-4-5\left(-\frac{17}{10}\right)}{5} = \frac{-4+\frac{17}{2}}{5} = \frac{\frac{9}{2}}{5} = \frac{9}{10} \end{cases}.$$

Par conséquent, **G** est le barycentre des points pondérés  $\left(A, -\frac{17}{10}\right)$ ,  $\left(B, \frac{9}{10}\right)$  et  $(C, 2)$ .

#### Exercice 4

1)



2) Comme  $\vec{AH} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$ , alors d'après la relation de Chasles,  
 $\vec{AH} = 2(\vec{AH} + \vec{HB}) + (\vec{AH} + \vec{HC})$ , c'est-à-dire  $\vec{AH} = 3\vec{AH} - 2\vec{BH} - \vec{CH}$ .

D'où  $2\vec{AH} - 2\vec{BH} - \vec{CH} = \vec{0}$ . Comme  $2-2-1 \neq 0$ , alors **H** est le barycentre des points pondérés  $(A, 2)$ ,  $(B, -2)$  et  $(C, -1)$ .

3) On sait que  $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ . Alors  $3\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC}$ .

D'après la relation de Chasles,  $3\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}$ . On en déduit que  $2\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ .  
Comme  $2+1 \neq 0$ , alors **F est le barycentre des points pondérés (B,2) et (C,1)**.

4) Comme F est le barycentre des points pondérés (B, 2) et (C, 1), d'après la propriété d'homogénéité, F est aussi le barycentre des points pondérés (B, -2) et (C, -1).

De plus, H est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, -2) et (C, -1).

D'après le théorème d'associativité des barycentres, on en déduit que **H est le barycentre des points pondérés (A,2) et (F,-3)**.

Par suite, H appartient à la droite (AF), et ainsi, **les points A, F et H sont alignés**.

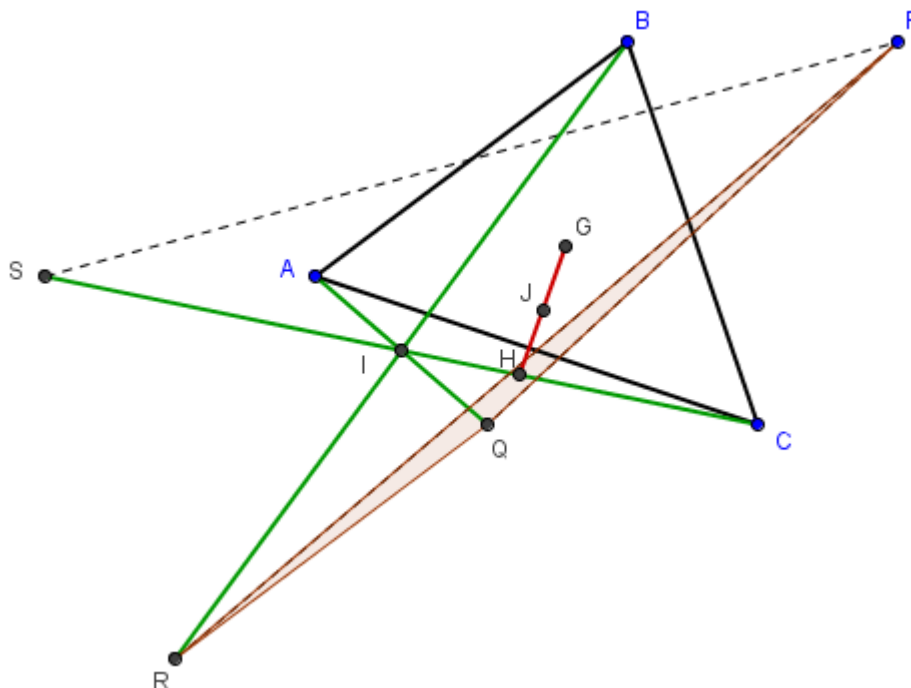
5) Comme H est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, -2) et (C, -1), d'après la propriété fondamentale, pour tout point M du plan,  $2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MH}$ .

Donc  $\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 6$  équivaut à  $\|-\overrightarrow{MH}\| = 6$ , c'est-à-dire à  $MH = 6$ .

Par conséquent, **l'ensemble des points M du plan tels que  $\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 6$ , est le cercle de centre H et de rayon 6.**

### Exercice 5

1)



2) Soit A' le milieu du segment [BC], alors A' est l'isobarycentre des points B et C.

D'après la propriété fondamentale, pour tout point M du plan,  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA'}$ .

Prenons  $M = Q$ ; on obtient :  $\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = 2\overrightarrow{QA'}$ .

Or Q est le symétrique de P par rapport à A',  $2\overrightarrow{QA'} = \overrightarrow{QP}$ .

On en déduit que  $\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QP}$ , c'est-à-dire  $\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QP} = \vec{0}$ .

Comme  $1+1-1 \neq 0$ , alors **Q est le barycentre des points pondérés (B,1), (C,1) et (P,-1)**.

Par la suite, on admettra que R est le barycentre des points pondérés (A, 1), (C, 1) et (P, -1), et, que S est le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 1) et (P, -1).

3) Comme  $I$  est le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(B, 1)$ ,  $(C, 1)$  et  $(P, -1)$ , et que  $R$  est le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(C, 1)$  et  $(P, -1)$ , d'après le théorème d'associativité,  $I$  est le barycentre des points pondérés  $(B, 1)$  et  $(R, 1)$ .

Donc  $I$  est le milieu du segment  $[BR]$ .

Comme  $I$  est le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(B, 1)$ ,  $(C, 1)$  et  $(P, -1)$ , et que  $S$  est le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(B, 1)$  et  $(P, -1)$ , d'après le théorème d'associativité,  $I$  est le barycentre des points pondérés  $(C, 1)$  et  $(S, 1)$ .

Donc  $I$  est le milieu du segment  $[CS]$ .

Comme  $I$  est le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(B, 1)$ ,  $(C, 1)$  et  $(P, -1)$ , et que  $Q$  est le barycentre des points pondérés  $(B, 1)$ ,  $(C, 1)$  et  $(P, -1)$ , d'après le théorème d'associativité,  $I$  est le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$  et  $(Q, 1)$ .

Donc  $I$  est le milieu du segment  $[AQ]$ .

4) Comme  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ , alors pour tout point  $M$  du plan,  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3 \overline{MG}$ .

Prenons  $M = L$  ; on obtient :  $\overline{LA} + \overline{LB} + \overline{LC} = 3 \overline{LG}$ .

De plus,  $H$  est le centre de gravité du triangle  $PQR$ , alors pour tout point  $M$  du plan,  $\overline{MP} + \overline{MQ} + \overline{MR} = 3 \overline{MH}$ .

Prenons  $M = L$  ; on obtient :  $\overline{LP} + \overline{LQ} + \overline{LR} = 3 \overline{LH}$ .

Comme  $L$  est le milieu de  $[GH]$ , alors  $\overline{GL} = \overline{LH}$ . D'où  $\overline{AL} + \overline{BL} + \overline{CL} = \overline{LP} + \overline{LQ} + \overline{LR}$ , c'est-à-dire  $\overline{AL} + \overline{BL} + \overline{CL} + \overline{PL} + \overline{QL} + \overline{RL} = \vec{0}$  [1].

Or  $I$  est le milieu de  $[AQ]$ , alors pour tout point  $M$  du plan,  $\overline{AM} + \overline{QM} = 2 \overline{IM}$ . En prenant  $M = L$ , on obtient  $\overline{AL} + \overline{QL} = 2 \overline{IL}$  [2].

De même,  $I$  est le milieu de  $[BR]$ , alors pour tout point  $M$  du plan,  $\overline{BM} + \overline{RM} = 2 \overline{IM}$ . En prenant  $M = L$ , on obtient  $\overline{BL} + \overline{RL} = 2 \overline{IL}$  [3].

En utilisant les relations [1], [2] et [3], on obtient :  $4 \overline{IL} + \overline{CL} + \overline{PL} = \vec{0}$ .

Comme  $4 + 1 + 1 \neq 0$ , alors  $L$  est le barycentre des points pondérés  $(I, 4)$ ,  $(C, 1)$  et  $(P, 1)$ , c'est-à-dire que  $L = J$ .

Par conséquent, le point  $J$ , barycentre des points pondérés  $(I, 4)$ ,  $(C, 1)$  et  $(P, 1)$ , est le milieu du segment  $[GH]$ .