DEVOIR COMMUN N° 2		16/11/2010
MATHÉMATIQUES		
Première S	Second degré, trigonométrie et dérivation	*Durée* : 3 heures

COLLÈGE PROTESTANT FRANÇAIS

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

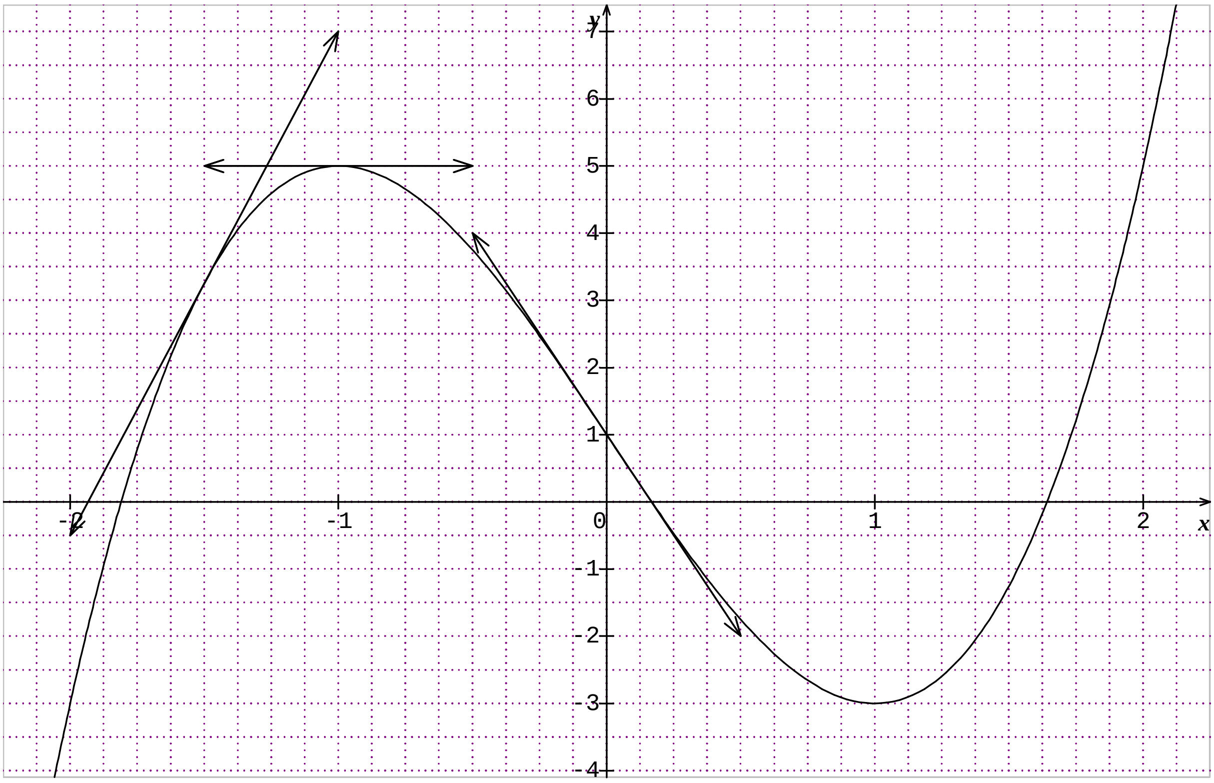
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

On rappelle que toute communication entre les élèves est interdite. L'échange de matériel durant l'épreuve (correcteur, rapporteur, etc ...) est notamment proscrit.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (1,5 *points*)

La courbe représentative d'une fonction g est tracée ci-dessous. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. Lire d'après le quadrillage, les nombres dérivés $g'(-1)$; $g'\left(-\frac{3}{2}\right)$ et $g'(0)$. Justifier.



Exercice 2 : (4 *points*)

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Démontrer que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$.

2) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.

3) a) Déterminer l'approximation affine de f au voisinage de 1.

b) En déduire $f(1{,}01)$.

Exercice 3 : (2 *points*)

Dans chacun des cas suivants, déterminer par lecture sur le cercle trigonométrique les réels x tels que :

1) $2\sin x+\sqrt{2}=0$ et $x\in\left[-\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2) $2\cos(x)-1\geq 0$ et $x\in[-\pi\ ;\ 0]$.

Exercice 4 : (2 *points*)

x désignant un réel quelconque, exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :

1) $A(x) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(9\pi - x)$;

2) $B(x) = \cos(x - \pi) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

Exercice 5 : (2 *points*)

Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$.

Exercice 6 : (4 *points*)

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sans indiquer l'ensemble de dérivabilité.

1) f est la fonction définie sur **R** par $f(x) = 3x^2 - x + 4$.

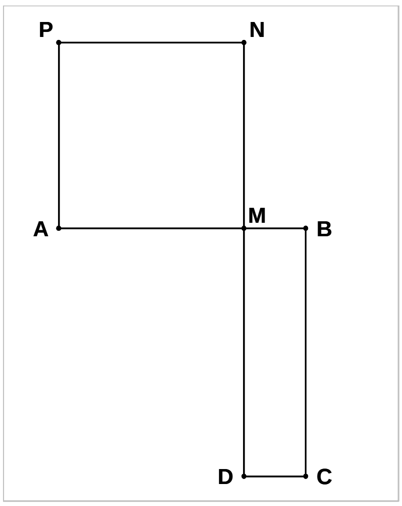
2) g est la fonction définie sur **R** par $g(x) = x^2 + \cos(x)$.

3) h est la fonction définie sur $\mathbf{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ par $h(x) = \frac{-5x+7}{3x-2}$.

4) m est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $m(x) = (3x-1)\sqrt{x}$.

Exercice 7 : (4 *points*)

On considère un segment $[AB]$ de longueur 2 cm. On place un point M sur le segment $[AB]$ distinct de A et de B. on construit le carré $AMNP$ et le rectangle $MBCD$ tel que $BC = 2$ cm. On pose $AM = x$.



1) Le but de cette partie est de déterminer les valeurs possibles de x pour lesquelles l'aire du carré est égale à l'aire du rectangle. Déterminer une équation du second degré qui permet de résoudre ce problème. Trouver alors la (ou les) solutions possibles.
2) Dans cette partie de l'exercice on veut déterminer la valeur de x pour laquelle la somme de l'aire du carré *AMNP* et du rectangle *MBCD* est minimale.
Soit f la fonction qui exprime la somme des deux aires en fonction de x.

a) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.

b) En déduire la valeur pour laquelle la somme est minimale.

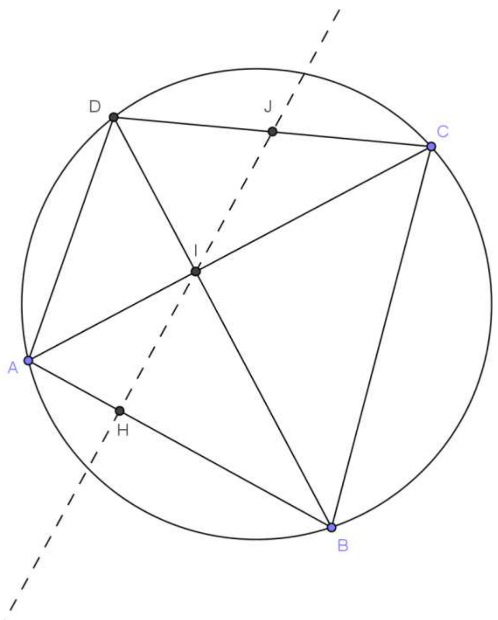
Exercice 8 : (5 *points*)

Dans le plan orienté, *ABCD* est un quadrilatère inscrit dans un cercle dont les diagonales se coupent en I et vérifient $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

J est le milieu de $[CD]$ et (IJ) coupe (AB) en H.

L'objectif de cet exercice est de démontrer que les droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires en évaluant.

Soit θ la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)$.



1) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{IJ}\right)=\theta+\left(\overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{IJ}\right)+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$.

2) a) Exprimer $\left(\overrightarrow{DI},\ \overrightarrow{DJ}\right)$ en fonction de θ.

b) Montrer que le triangle DIJ est isocèle.

c) En déduire $\left(\overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{IJ}\right)$ en fonction de θ.

3) Conclure.