CORRECTION DU DEVOIR COMMUN N° 2	
Second degré, trigonométrie et dérivation	***Le 16 janvier 2010***

Exercice 1

$g'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1. Or cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses. D'où $\boldsymbol{g'(-1)=0}$.

$g'\left(-\frac{3}{2}\right)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $-\frac{3}{2}$. Or cette tangente est passe par les points de coordonnées $(-2\ ;\ -0{,}5)$ et $(-1\ ;\ 7)$.

D'où $\boldsymbol{g'\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{7+0{,}5}{-1+2}\boldsymbol{=7{,}5}$.

$g'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. Or cette tangente est passe par les points de coordonnées $(-0{,}5\ ;\ 4)$ et $(0{,}5\ ;\ -2)$.

D'où $\boldsymbol{g'(0)}=\frac{-2-4}{0{,}5+0{,}5}\boldsymbol{=-6}$.

Exercice 2

1) Soit a un réel strictement positif. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h}=\frac{-\cancel{h}}{(a+h)a}\times\frac{1}{\cancel{h}}=-\frac{1}{(a+h)a}.$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{(a+h)a}\right)=-\frac{1}{a^2}$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a strictement positif, et $f'(a)=-\frac{1}{a^2}$.

Par suite, **la fonction f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et, pour tout x de $]0\ ;+\infty[$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$**

2) (T) est la droite passant par le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1 et ayant pour coefficient directeur $f'(1)$. D'où (T) a pour équation $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

Or $f(1)=1$ et $f'(1)=-\frac{1}{1}=-1$.

Par conséquent, **(T) a pour équation y** $=-1(x-1)+1$ $\boldsymbol{=-x+2}$.

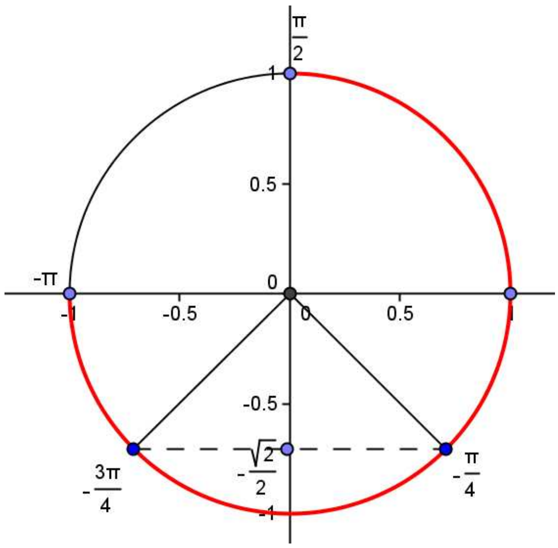
3) a) Pour h proche de 0, $f(1+h)\approx f(1)+hf'(1)$.
D'après les questions précédentes, on en déduit que :
pour h proche de 0, $\boldsymbol{f(1+h)\approx 1-h}$.

b) $f(1{,}01)=f(1+0{,}01)$.

D'après la question précédente, $f(1{,}01)\approx 1-0{,}01$, c'est-à-dire $\boldsymbol{f(1{,}01)\approx 0{,}99}$.

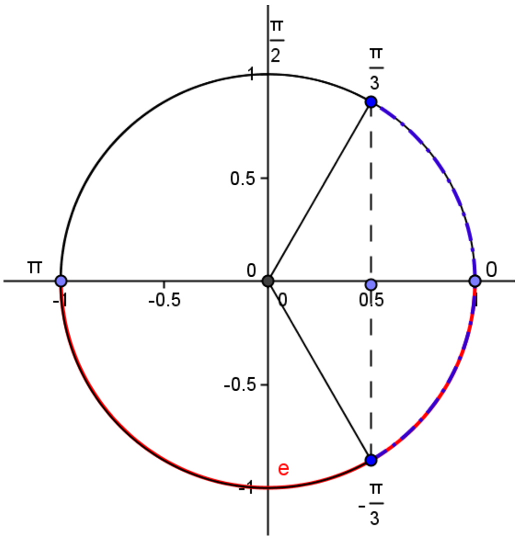
Exercice 3

1) $2\sin x+\sqrt{2}=0$ équivaut à $\sin(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Comme $x \in \left[-\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, alors **les solutions de l'équation sont** $\boldsymbol{-\frac{3\pi}{4}}$ **et** $\boldsymbol{-\frac{\pi}{4}}$.

2) $2\cos(x) - 1 \geq 0$ équivaut à $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$.



Comme $x \in [-\pi\ ;\ 0]$, alors **les solutions de l'inéquation appartiennent à** $\boldsymbol{\left[-\frac{\pi}{3}\ ;\ 0\right]}$.

<u>Exercice 4</u>

1) $$\boldsymbol{A(x)} = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(9\pi - x)$$
$$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) - 3\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] - 4\sin(8\pi + \pi - x)$$
$$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 4\sin(\pi - x)$$
$$= \cos(x) - 3(-\sin(x)) - 4\sin(x)$$
$$\boldsymbol{= \cos(x) - \sin(x)}$$

2) $$B(x) = \cos(x - \pi) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= \cos(x - \pi) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$$
$$= \cos(x - \pi) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\cos(x) + \cos(x) - \cos(x) - \cos(x)$$

Par conséquent, $\boldsymbol{B(x)=-2\cos(x)}$.

Exercice 5

1) Comme $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$, alors

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=1-\frac{5+1+2\sqrt{5}}{16}=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}.$$

Or $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$, alors $\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}\boldsymbol{=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$.

2) $\boldsymbol{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\boldsymbol{=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$.

3) $\boldsymbol{\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\boldsymbol{=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

Exercice 6

1) On a : $f=3u+v$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=-x+4$.
Alors $f'=3u'+v'$ avec $u'(x)=2x$ et $v'(x)=-1$. Donc, $\boldsymbol{f'(x)=6x-1}$.

2) On a : $g=u+v$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=\cos(x)$.
Alors $g'=u'+v'$ avec $u'(x)=2x$ et $v'(x)=-\sin(x)$. Donc, $\boldsymbol{g'(x)=2x-\sin(x)}$.

3) On a : $h=\frac{u}{v}$ avec $u(x)=-5x+7$ et $v(x)=3x-2$.
Alors $h'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x)=-5$ et $v'(x)=3$.
D'où : $h'(x)=\frac{-5(3x-2)-(-5x+7)3}{(3x-2)^2}=\frac{-15x+10+15x-21}{(3x-2)^2}$. Donc, $\boldsymbol{h'(x)=\frac{-11}{(3x-2)^2}}$.

4) On a : $m=u\times v$ avec $u(x)=3x-1$ et $v(x)=\sqrt{x}$.
Alors $m'=u'\times v+u\times v'$ avec $u'(x)=3$ et $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
D'où : $m'(x)=3\sqrt{x}+(3x-1)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{6x+(3x-1)}{2\sqrt{x}}$. Donc, $\boldsymbol{m'(x)=\frac{9x-1}{2\sqrt{x}}}$.

Exercice 7

1) $aire(AMNP)=AM^2=x^2$ et $aire(MBCD)=MB\times BC=(2-x)\times 2=-2x+4$.
Alors $aire(AMNP)=aire(MBCD)$ équivaut à $x^2=-2x+4$, c'est-à-dire à $\boldsymbol{x^2+2x-4=0}$.
Calculons le discriminant de ce trinôme : $\Delta=2^2-4\times1\times(-4)=20$.
Comme $\Delta>0$, l'équation $x^2+2x-4=0$ admet deux racines :

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{20}}{2}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{2}=-1-\sqrt{5} \text{ et } x_2=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}=\frac{-2+2\sqrt{5}}{2}=-1+\sqrt{5}.$$

Comme $-1-\sqrt{5}<0$, alors l'équation $x^2+2x-4=0$ admet une seule solution $-1+\sqrt{5}$.
Par conséquent, **l'aire du carré *AMNP* est égale à l'aire du rectangle *MBCD* lorsque $\boldsymbol{AM=-1+\sqrt{5}}$**.

2) D'après la question précédente, $\boldsymbol{f(x)=x^2-2x+4}$, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.

a) La fonction f est une fonction du second degré avec le coefficient du monôme x^2 qui est positif. De plus, $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{2}{2}=1$.

Par conséquent, **la fonction f est strictement décroissante sur $[0\ ;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;2]$**.

b) On en déduit que la fonction f admet un minimum lorsque $x=1$.
Par suite, **la somme de l'aire du carré *AMNP* et du rectangle *MBCD* est minimale lorsque *M* est le milieu de $[AB]$**.

<u>Exercice 8</u>

1) D'après la relation de Chasles, $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{IJ}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{IJ}\right)+2k_1\pi\quad (k_1\in\mathbf{Z})$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, alors
$\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{IC}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)+2k_2\pi=\theta+2k_2\pi\quad (k_2\in\mathbf{Z})$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{IJ}\right)=\theta+\left(\overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{IJ}\right)+2k\pi\quad (k\in\mathbf{Z})}$.

2) a) Comme les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DB}$ d'une part, et que les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DC}$ d'autre part, sont colinéaires et de même sens, alors $\left(\overrightarrow{DI},\ \overrightarrow{DJ}\right)=\left(\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DC}\right)+2k_1\pi\quad (k_1\in\mathbf{Z})$.

De plus, les angles géométriques $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont des angles inscrits qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$, ils ont donc la même mesure.
Comme les angles $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DC}\right)$, sont orientés dans le sens direct, alors
$\left(\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)+2k_2\pi\quad (k_2\in\mathbf{Z})=\theta+2k_2\pi\quad (k_2\in\mathbf{Z})$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{DI},\ \overrightarrow{DJ}\right)=\theta+2k\pi\quad (k\in\mathbf{Z})}$.

b) D'après l'énoncé, les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires en I ; alors le triangle DIC est rectangle en I. On en déduit que ce triangle est inscrit dans un cercle dont le centre est le milieu de $[CD]$, c'est-à-dire J.

On en conclut que $JC=JD=JI$; par conséquent, **le triangle *DIJ* est isocèle en *J***.

c) $\left(\overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{IJ}\right)=\left(\overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{ID}\right)+\left(\overrightarrow{ID},\ \overrightarrow{IJ}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}\right)+\left(\overrightarrow{ID},\ \overrightarrow{IJ}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\left(\overrightarrow{IJ},\ \overrightarrow{ID}\right)$

Les angles à la base d'un triangle isocèle ont même mesure ; alors, d'après la question précédente, $\text{mes}\left(\widehat{JDI}\right)=\text{mes}\left(\widehat{JID}\right)$. De plus, les angles $\left(\overrightarrow{DI},\ \overrightarrow{DJ}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IJ},\ \overrightarrow{ID}\right)$ sont directs, alors $\left(\overrightarrow{DI},\ \overrightarrow{DJ}\right)=\left(\overrightarrow{IJ},\ \overrightarrow{ID}\right)$. D'où $\left(\overrightarrow{IJ},\ \overrightarrow{ID}\right)=\theta+2k\pi\quad (k\in\mathbf{Z})$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{IJ}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\theta+2k\pi\quad (k\in\mathbf{Z})}$.

3) D'après les questions 1) et 3), $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{IJ}\right)=\theta+\dfrac{\pi}{2}-\theta+2k'\pi=\dfrac{\pi}{2}+2k'\pi\quad (k'\in\mathbf{Z})$.

On en déduit que **les droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires**.