

DEVOIR COMMUN N° 3

14/05/2010

MATHÉMATIQUES

Première S

Comportement asymptotique d'une
fonction, sens de variations d'une
fonction, suites et géométrie dans
l'espace

Durée : 2 heures



L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

On rappelle que toute communication entre les élèves est interdite. L'échange de matériel durant l'épreuve (correcteur, rapporteur, etc ...) est notamment proscrit.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (2 points)

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x^2} - x) & \quad ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 8} \right) \\ 3) \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3} \right) & \quad ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-x}{1+x^2} \right) \end{aligned}$$

Exercice 2 : (3 points)

Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx - 2}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- Déterminer les réels a , b et c sachant que :
 - la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à \mathcal{C}_f ;
 - \mathcal{C}_f passe par le point $A(1; -2)$;
 - \mathcal{C}_f admet en A une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 5$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R} - \{2\}$ par $g(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$

Démontrer que la courbe \mathcal{C}_g admet une asymptote oblique.

Exercice 3 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$; \mathcal{C}_f est sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Trouver les trois réels a , b et c sachant que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.
- Démontrer que \mathcal{C}_f admet le point $I(2; 3)$ comme centre de symétrie.
- Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que \mathcal{C}_f admet une asymptote verticale (D) et une asymptote oblique (Δ) .
- Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- Étudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à (Δ) .
- Déterminer l'équation de la tangente (T_0) à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
- Tracer (T_0) , (D) , (Δ) et \mathcal{C}_f dans le même repère.
- En déduire le tableau de variation de la fonction g définie par $g = \frac{1}{f}$.

Exercice 4 : (5 points)

Une enquête étudie le nombre de clients dans un supermarché.

On constate que chaque mois 70% des clients du mois précédent restent fidèles à ce supermarché et que 3000 nouveaux clients apparaissent.

On note u_n le nombre de clients venus au cours du nième mois de l'enquête.

Ainsi $u_1 = 8000$.

1) Montrer que $u_2 = 8600$, puis calculer u_3 .

2) Calculer u_{n+1} en fonction de u_n .

La suite (u_n) est-elle géométrique ? arithmétique ?

3) Peut-on déterminer les variations de la suite (u_n) ?

4) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul, par $v_n = 10000 - u_n$.

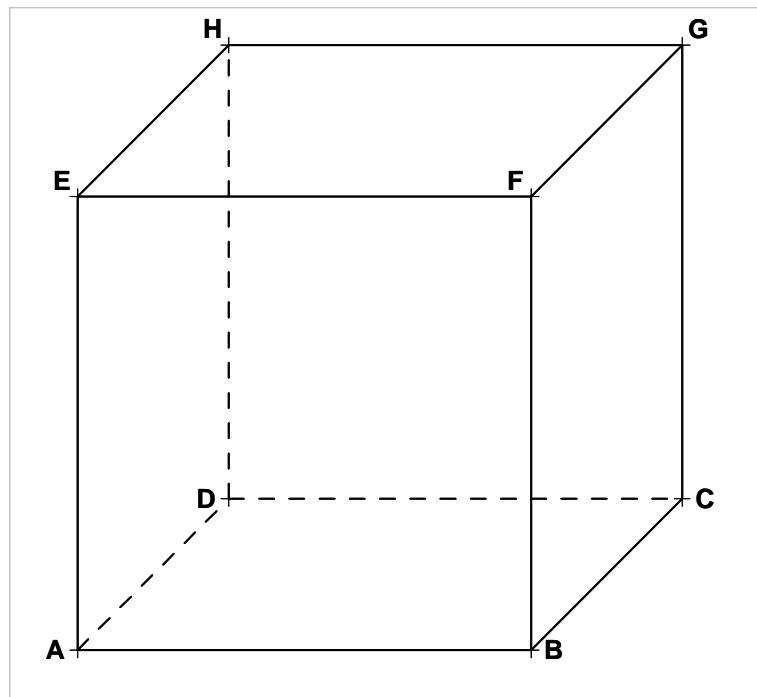
a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, $v_{n+1} = 7000 - 0,7u_n$.

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Exprimer v_n et u_n en fonction de n .

Exercice 5 : (5 points)

Voici un cube de 6 cm d'arête.



1) Dans le cube ci-dessus, placer le point I milieu de $[AE]$ et J le point de $[HG]$ tel que $HJ = 1,5$ cm.

2) Tracer et hachurer la section de ce cube par le plan (CIJ) . On l'appellera $JVIKC$.

Expliquer précisément les étapes.

3) Quelle est la face du cube qui reste intacte après la section ? Construire en justifiant, l'intersection de la droite (VJ) et du plan (BFG) . On l'appellera O .

- 4) Que peut-on dire des triangles CJG et IKA ? En déduire les longueurs CJ et IK .
- 5) Soit M le point tel que $\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}$, N le barycentre des points pondérés $(E ; 2)$ et $(C ; 4)$, et P le point tel que $\overrightarrow{EP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EB}$.
- Démontrer que le plan (MNP) est parallèle au plan (DCB) .
 - Calculer le volume du tronçon $MNPABC$.