

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 10

**Sections dans l'espace et
comportement asymptotique**

Le 7 mai 2010

Exercice 1

$$a) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(\frac{3}{x-2} \right) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} 3 = 3 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x-2) = 0^- \end{cases}, \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} 12 = 12.$$

Par somme de limites, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(12 + \frac{3}{x-2} \right) = -\infty.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ d'après la règle du monôme de plus haut degré.

c) On obtient ici la forme indéterminée $\left(\frac{0}{0} \right).$

$$\frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{x-3} = (x+3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})$$

Or $\lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$ et $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$

Donc $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \right) = 6 + 2\sqrt{3}$ (par somme de limites).

$$d) \sqrt{x} - \sqrt{x+2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}} = \frac{-2}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x+2}) = +\infty$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x+2}) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}} \right) = 0$ (par quotient

de limites). Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+2}) = 0.$

e) On obtient ici la forme indéterminée $\left(\frac{0}{0} \right).$ Or $\frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{x-1}.$

Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x-2) = -1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x-1) = 0^-$, alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2} = +\infty$ (par quotient de

limites).

$$f) \left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (-x^2 + x - 1) = -3 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (2-x)(x-1) = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-x^2 + x - 1}{(2-x)(x-1)} = +\infty \text{ (par quotient de limites).}$$

Exercice 2

1) Comme la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à (C_f) , alors $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$ et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2) a) Soit x un réel de $\mathbf{R} - \{-2\}$.

$$ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2 + (2a+b)x + (2b+c)}{x+2}.$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=5 \\ 2b+c=3 \end{cases}, \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} a=2 \\ b=5-2a=5-4=1. \\ c=3-2b=3-2=1 \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout x de $\mathbf{R} - \{-2\}$, $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+2}$.

b) $f(x) = 2x + 1 + h(x)$ avec $h(x) = \frac{1}{x+2}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+2}\right) = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x+2}\right) = 0$.

Par conséquent, (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

Autre méthode : On a : $f(x) - (2x+1) = \frac{1}{x+2}$. Puis, on montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x+1)) = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x+1)) = 0$.

Mais cette méthode est intéressante si l'on donne l'équation réduite de l'asymptote oblique à la courbe (C_f) .

c) On est amené à étudier le signe de $f(x) - (2x+1) = \frac{1}{x+2}$.

Or si $x > -2$, $\frac{1}{x+2} > 0$; c'est-à-dire $f(x) - (2x+1) > 0$.

Donc, (C_f) est au dessus de (Δ) sur $]-2 ; +\infty[$.

Si $x < -2$, $\frac{1}{x+2} < 0$; c'est-à-dire $f(x) - (2x+1) < 0$.

Donc, (C_f) est en dessous de (Δ) sur $]-\infty ; -2[$.

Exercice 3

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$ (règle du quotient des monômes de plus haut degré).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$ (règle du quotient des monômes de plus haut degré).

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (-2x^2 + 3x) = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x - 1) = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty \text{ (par quotient de limites).}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (-2x^2 + 3x) = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x - 1) = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty \text{ (par quotient de limites).}$$

On en déduit que (\mathcal{C}_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2) a) Soit x un réel différent de 1.

$$-3x + \frac{x^2}{x-1} = \frac{-3x(x-1) + x^2}{x-1} = \frac{-3x^2 + 3x + x^2}{x-1} = \frac{-2x^2 + 3x}{x-1} = f(x).$$

Par conséquent, pour x différent de 1, $f(x) = -3x + \frac{x^2}{x-1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ (d'après la règle du quotient des monômes de plus haut degré). Comme ces limites sont différentes de 0, alors la droite d'équation $y = -3x$ n'est pas une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}_f) .

Exercice 4

1) La droite (PF) est incluse dans le plan $(BCGF)$.

La droite (BC) , incluse dans $(BCGF)$ et non parallèle à (PF) , coupe donc cette droite en un point que l'on notera K .

Par conséquent, K est le point d'intersection des droites (PF) et (BC) .

2) Q est un point de la face $EFGH$, alors (QF) est incluse dans le plan $(EFGH)$.

Or les plans $(EFGH)$ et (EHC) se coupent selon la droite (EH) .

Donc (QF) coupe le plan (EHC) en un point de la droite (EH) .

Par conséquent, L est le point d'intersection des droites (QF) et (EH) .

3) K appartient à (PF) et L appartient à (QF) ; par suite, K et L appartiennent au plan (PQF) . Donc les points P, Q, K et L sont coplanaires (ils appartiennent tous les quatre au plan (PQF)).

4) D'après ce qui précède, la droite (KL) est incluse dans le plan (EHC) .

De plus, P, Q, K et L sont coplanaires. Par suite, les droites (PQ) et (KL) sont coplanaires et non parallèles; elles se coupent donc en un point que l'on appellera M .

Par conséquent, l'intersection de la droite (PQ) et du plan (EHC) est le point d'intersection des droites (PQ) et (KL) .

