

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

Second degré

Le 13 novembre 2009

Exercice 1

1) Soit (E_1) l'équation $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$.

Il n'est pas utile de calculer le discriminant ; il est plus judicieux de factoriser l'expression par $\frac{1}{2}$. En effet, $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$ équivaut à $\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) = 0$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(x-2)^2 = 0$.

On en déduit alors : $x - 2 = 0$, d'où $x = 2$.

Par conséquent, $S = \{2\}$.

2) $(x-1)^2 = -3(x+1)^2$ équivaut à $x^2 - 2x + 1 = -3(x^2 + 2x + 1)$, c'est-à-dire à $4x^2 + 4x + 4 = 0$. Donc $(x-1)^2 = -3(x+1)^2$ équivaut à $x^2 + x + 1 = 0$.

Soit (E_2) l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$; comme $\Delta < 0$, alors (E_2) n'admet pas de solution.

Par conséquent, $S = \emptyset$.

3) Soit (E_3) cette équation.

$$(E_3) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3x+1}{5}\right) \left[3\left(\frac{3x+1}{5}\right) - 2\right] = 0$$

$$(E_3) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3x+1}{5}\right) \left[\frac{9x+3-10}{5}\right] = 0$$

$$(E_3) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3x+1}{5}\right) \left(\frac{9x-7}{5}\right) = 0$$

$$(E_3) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x+1}{5} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{9x-7}{5} = 0$$

$$(E_3) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7}{9}$$

Par conséquent, $S = \left\{-\frac{1}{3} ; \frac{7}{9}\right\}$.

4) Soit (E_4) l'équation $\frac{-13}{x-1} + \frac{6}{x} = 3$.

Il faut que $x-1$ et x soient différents de 0 pour que l'égalité soit valable.

Donc l'intervalle d'étude est : $I = \mathbf{R} \setminus \{0 ; 1\}$.

$$(E_5) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-13x}{x(x-1)} + \frac{6(x-1)}{x(x-1)} = \frac{3x(x-1)}{x(x-1)}$$

en multipliant chaque membre de l'égalité
par $x(x-1)$

$$(E_5) \quad \Leftrightarrow \quad -13x + 6x - 6 = 3x^2 - 3x$$

$$(E_5) \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 4x + 6 = 0$$

$\Delta = 16 - 48 = -36$; comme $\Delta < 0$, alors (E_4) n'admet pas de solution.

Par conséquent, $S = \emptyset$.

5) Soit (E_5) l'équation $\frac{2x+5}{x-2} = \frac{3x-6}{x+4}$.

Il faut que $x-2$ et $x+4$ soient différents de 0 pour que l'égalité soit valable.

Donc l'intervalle d'étude est : $I = \mathbf{R} \setminus \{-4 ; 2\}$.

$$(E_5) \quad \Leftrightarrow \quad (2x+5)(x+4) = (x-2)(3x-6)$$

$$(E_5) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 8x + 5x + 20 = 3x^2 - 6x - 6x + 12$$

$$(E_5) \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 25x + 8 = 0$$

$\Delta = 25^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 657$; comme $\Delta > 0$, alors l'équation (E_5) admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-25 - \sqrt{657}}{-2} = \frac{-25 - 3\sqrt{73}}{-2} = \frac{25 + 3\sqrt{73}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-25 + \sqrt{657}}{-2} = \frac{-25 + 3\sqrt{73}}{-2} = \frac{25 - 3\sqrt{73}}{2}$$

Par conséquent, $S = \left\{ \frac{25 - 3\sqrt{73}}{2} ; \frac{25 + 3\sqrt{73}}{2} \right\}$.

Exercice 2

1) Soit $f(x) = x^2 + 10x + 25$. On remarque que $f(x) = (x+5)^2$.

D'où $f(x)$ est toujours positif sur \mathbf{R} et s'annule pour $x = -5$.

On obtient alors le signe de l'expression $3x^2 + 4x + 1$:

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
$x^2 + 10x + 25$	+	0	+

Soit $g(x) = -2x^2 - 7x - 3$.

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = 25$; comme $\Delta > 0$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet deux

solutions : $x_1 = \frac{7-5}{-4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{7+5}{-4} = -3$.

On obtient alors le signe de l'expression $3x^2 + 4x + 1$:

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$-2x^2 - 7x - 3$	-	0	+	0	-

2) Ce quotient existe si x est différent de -3 et $-\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	-5	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$x^2 + 10x + 25$	+	0	+	+	+	
$-2x^2 - 7x - 3$	-	-	0	+	0	-

$\frac{x^2 + 10x + 25}{-2x^2 - 7x - 3}$	-	0	-		+		-
---	---	---	---	--	---	--	---

Les solutions de l'inéquation $\frac{x^2 + 10x + 25}{-2x^2 - 7x - 3} < 0$ appartiennent à

$$]-\infty; -5[\cup]-5; -3[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[.$$

Exercice 3

1) a) $f(x)$ est un trinôme du second degré. Comme $a = -1$ (le coefficient du x^2 est négatif), alors la représentation graphique de f est une parabole ayant « les branches vers le bas », et le sommet S de cette parabole a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Or $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$ et $f(2) = -4 + 8 - 1 = 3$.

D'où :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

b) Les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $-x^2 + 4x - 1 = 0$.

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 12$; comme $\Delta > 0$, alors l'équation $-x^2 + 4x - 1 = 0$ admet deux

solutions : $x_1 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{-2} = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{-2(2 + \sqrt{3})}{-2} = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{-2} = 2 - \sqrt{3}$.

Par conséquent, **les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(2 - \sqrt{3}; 0)$ et $(2 + \sqrt{3}; 0)$.**

2) a) Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq -2x + 4$ sont les abscisses des points de (C_f) se trouvant au-dessus ou sur la droite d'équation $y = -2x + 4$.

D'après le graphique ci-dessus, on peut dire que $S = [1; 5]$.

b) $f(x) \geq -2x + 4$ équivaut à $-x^2 + 6x - 5 \geq 0$.

Cherchons le signe du trinôme du second degré $-x^2 + 6x - 5$.

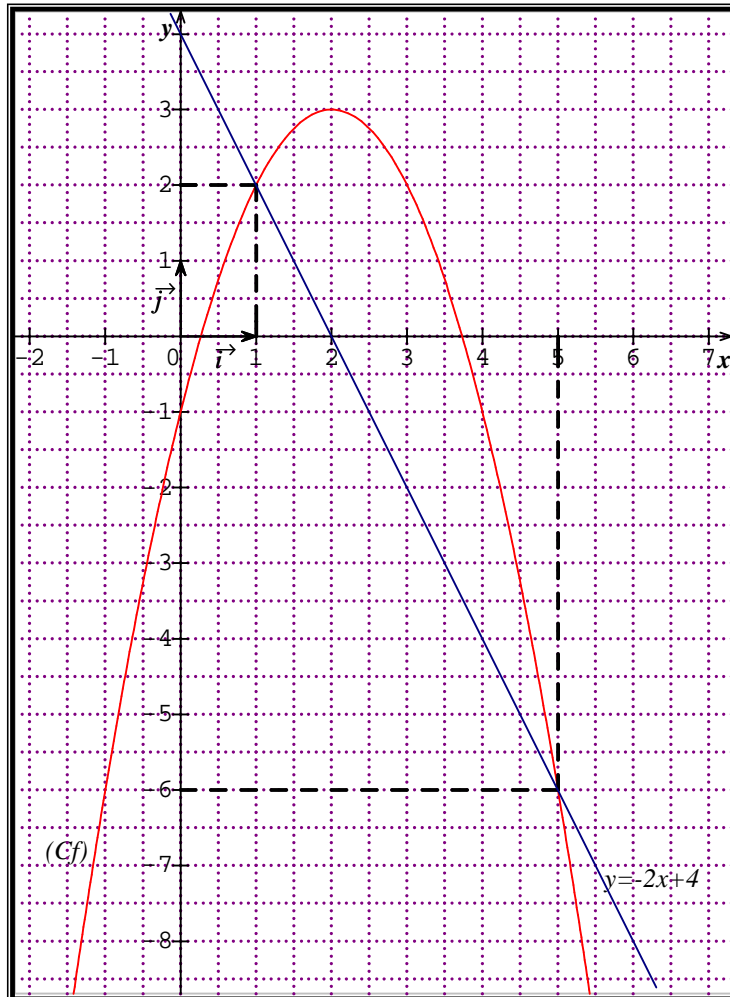
$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 16$; comme $\Delta > 0$, alors l'expression $-x^2 + 6x - 5$ admet deux

racines : $x_1 = \frac{-6 - \sqrt{16}}{-2} = \frac{-6 - 4}{-2} = 5$ et $x_2 = \frac{-6 + \sqrt{16}}{-2} = \frac{-6 + 4}{-2} = 1$. D'où :

$-x^2 + 6x - 5$ est du signe de (-1) à l'extérieur des racines, c'est-à-dire négatif pour tout x de $]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[$;

$-x^2 + 6x - 5$ est du signe de $-(-1)$ à l'intérieur des racines, c'est-à-dire positif pour tout x de $[1; 5]$.

Par conséquent, $S = [1; 5]$.



Exercice 3

1) Comme la *courbe n°3* est une parabole dont les branches sont tournées vers le haut, alors elle représente une fonction du second degré dont le coefficient du monôme du 2nd degré est positif. La seule fonction qui corresponde à ces propriétés est *m*. Par conséquent, **la *courbe n°3* représente la fonction *m***.

$g(x) = -ax^2 - b = -(ax^2 + b)$. Comme les réels a et b sont strictement positifs, alors $g(x)$ est strictement négatif pour tout réel x . On en déduit que sa courbe représentative se situera en dessous de l'axe des abscisses.

De plus, cette courbe est une parabole dont le sommet a pour abscisse $x_0 = -\frac{0}{2 \times (-a)} = 0$.

Par conséquent, **la *courbe n°4* représente la fonction *g***.

La fonction f est représentée par une parabole dont le sommet a pour abscisse

$x_0 = -\frac{2a}{2 \times (-a)} = 1$. Or entre les deux *courbes n°1* et *n°2*, la seule dont le sommet a une

abscisse positive est la *courbe n°2*.

Par conséquent, **la *courbe n°2* représente la fonction *f***.

Par élimination, on en déduit que **la *courbe n°1* représente la fonction *h***.

2) Comme la *courbe n°4* est toujours en dessous de l'axe des abscisses, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans \mathbf{R} .

Par conséquent, **le trinôme de *g* a un discriminant négatif**.

Comme la *courbe n°2* est toujours en dessous de l'axe des abscisses, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans \mathbf{R} .

Par conséquent, **le trinôme de f a un discriminant négatif.**

Exercice 4

$$1) a) \mathcal{A}(x) = \text{aire}(MPDC) + \text{aire}(MNA) = DC \times CM + \frac{MN \times AM}{2} = 3(10 - x) + \frac{MN \times x}{2}.$$

Dans le triangle ABC , M et N appartiennent respectivement à $[AC]$ et $[AB]$. De plus, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on obtient :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

$$\text{Or } \frac{AM}{AC} = \frac{MN}{BC} \text{ équivaut à } \frac{x}{10} = \frac{MN}{8}, \text{ c'est-à-dire à } MN = \frac{8x}{10} = 0,8x.$$

$$\text{Par conséquent, } \mathcal{A}(x) = 3(10 - x) + \frac{0,8x^2}{2} = 0,4x^2 - 3x + 30 = \frac{2}{5}x^2 - 3x + 30.$$

b) M décrit le segment $[AC]$ de longueur 10.

Donc **l'ensemble de définition de \mathcal{A} est $[0 ; 10]$.**

$$2) a) \mathcal{A} \text{ est une fonction polynôme du second degré avec } a > 0. \text{ De plus, } -\frac{b}{2a} = \frac{3}{\frac{4}{5}} = \frac{15}{4}.$$

Par conséquent, **la fonction \mathcal{A} est strictement décroissante sur $\left[0 ; \frac{15}{4}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{15}{4} ; 10\right]$.**

b) D'après la question précédente, on en déduit que **la fonction f admet un minimum lorsque $x = \frac{15}{4}$, c'est-à-dire lorsque $AM = \frac{15}{4}$.**

$$3) \text{ Résolvons l'équation } \mathcal{A}(x) = 25, \text{ c'est-à-dire } \frac{2}{5}x^2 - 3x + 5 = 0.$$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times \frac{2}{5} \times 5 = 1$; comme $\Delta > 0$, alors l'équation $\mathcal{A}(x) = 25$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{\frac{4}{5}} = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{\frac{4}{5}} = 4 \times \frac{5}{4} = 5.$$

Par conséquent, **l'aire de la partie hachurée est égale à 25 cm^2 lorsque $AM = \frac{5}{2}$ ou lorsque $AM = 5$.**