DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Angles orientés, trigonométrie et second degré	***Le 11 décembre 2009***

Durée du devoir surveillé : 110 minutes
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 (4 points)

Construire un triangle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ et $\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{\pi}{5}$.

Déterminer une mesure principale de chacun des angles orientés :

a) $\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$; b) $\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CA}\right)$; c) $\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)$

Exercice 2 (4 *points*)

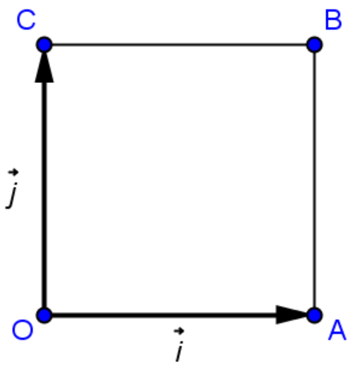
1) ***Restitution organisée de connaissances*** :

Dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, un point M distinct de O a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$.

$(\rho,\ \theta)$ est un couple de coordonnées polaires de M dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\right)$.

Démontrer que : $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$; $x=\rho\cos(\theta)$ et $y=\rho\sin(\theta)$.

2) $OABC$ est un carré de côté 1, et on choisit un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ en posant $\vec{i}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OC}$.



a) Dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, le point M a pour coordonnées $\left(2\ ;\ 2\sqrt{3}\right)$. Donner les coordonnées polaires de M dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\right)$.

b) Donner les coordonnées polaires de B dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\right)$.

c) Le point P est tel que : $\left(\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OP}\right)=\dfrac{5\pi}{12}$ et $OP=4$. Donner les coordonnées polaires de P dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\right)$, et en déduire ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

Exercice 3 (3 *points*)

Simplifier, en détaillant les calculs, les expressions suivantes :

1) $A=\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)+\cos\left(\dfrac{4\pi}{10}\right)+\cos\left(\dfrac{6\pi}{10}\right)+\cos\left(\dfrac{9\pi}{10}\right)$.

2) $B=\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)+\sin\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)+\sin\left(\dfrac{8\pi}{5}\right)$.

Exercice 4 (4 *points*)

1) (E) est l'équation $\cos(3x)=\dfrac{1}{2}$.

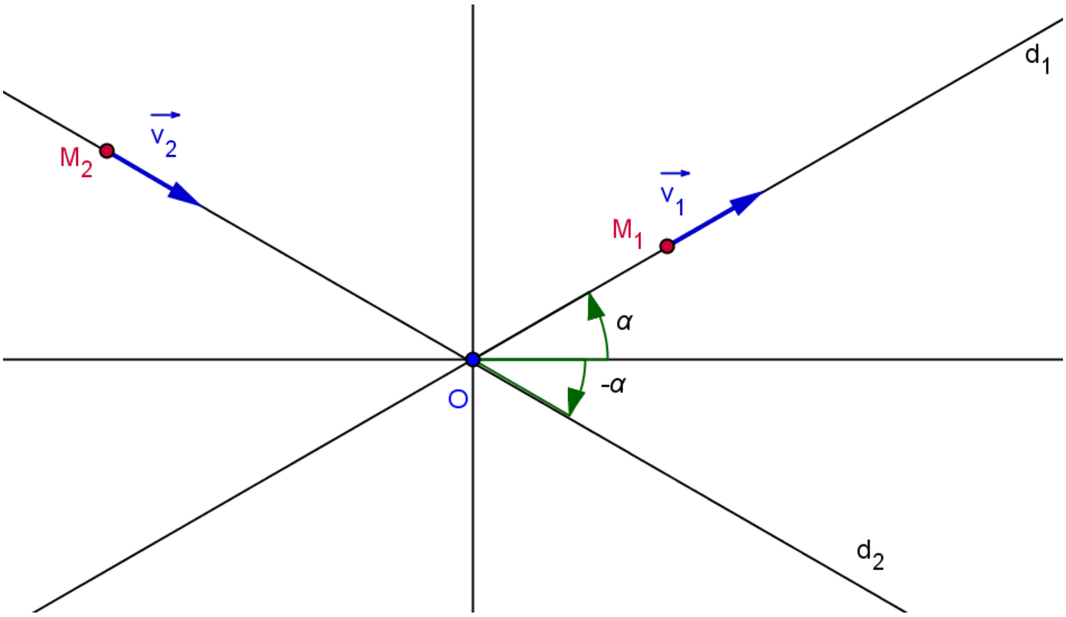
Résoudre l'équation (E) dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

2) Résoudre, dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, l'inéquation $\cos(3x)\geq\dfrac{1}{2}$.

3) Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $2\cos^2(3x)+3\cos(3x)-2=0$.

Exercice 5 (5 *points*)

On considère les deux droites d_1 et d_2 de la figure ci-dessous pour $\alpha=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$.



Deux mobiles M_1 et M_2 se déplacent respectivement sur d_1 et d_2 d'un même mouvement rectiligne uniforme. Les vecteurs vitesses de M_1 et M_2 sont notés $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. On se demande à quel instant les mobiles seront le plus près l'un de l'autre.

Données :

- M_1 et M_2 vont à la même vitesse $v_1=v_2=1\,\text{m.s}^{-1}$
- le sens de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ est indiqué sur la figure ci-dessus
- à l'instant $t=0$, le point M_1 se trouve en O, et le point M_2 se trouve au point $m\left(-3\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

1) a) Déterminer les coordonnées polaires de m.
   b) Montrer que m appartient à d_2.

2) Montrer que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

3) a) Sachant que $\overrightarrow{OM_1} = t\ \overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{mM_2} = t\ \overrightarrow{v_2}$, déterminer les coordonnées de M_1 et M_2 en fonction de t.

   b) En déduire que $M_1M_2 = \sqrt{t^2 - 3t + 9}$.

4) Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = t^2 - 3t + 9$.

   a) Montrer que la fonction f est minimale à un instant t_0.

   b) En admettant que les fonctions f et $\sqrt{f}$ ont les mêmes variations sur $[0\ ;\ +\infty[$, à quel instant t les deux mobiles sont-ils le plus proches l'un de l'autre ? Quelle est la distance minimale entre ces deux mobiles ?