

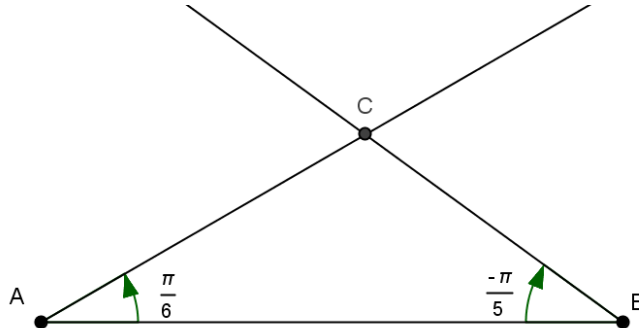
CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

**Angles orientés, trigonométrie
et second degré**

Le 11 décembre 2009

Exercice 1

1)



$$2) a) (\overline{BA}; \overline{AC}) = (-\overline{AB}; \overline{AC}) = (\overline{AB}; \overline{AC}) + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}.$$

Or $\frac{7\pi}{6}$ n'est pas une mesure principale, et $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$.

Donc la mesure principale de $(\overline{BA}; \overline{AC})$ est $-\frac{5\pi}{6}$.

$$b) (\overline{BC}; \overline{CA}) = (\overline{BC}; \overline{BA}) + (\overline{BA}; \overline{CA}) \text{ d'après la relation de Chasles.}$$

$$\text{D'où : } (\overline{BC}; \overline{CA}) = -(\overline{BA}; \overline{BC}) + (\overline{BA}; \overline{CA}) = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{30}.$$

Donc la mesure principale de $(\overline{BC}; \overline{CA})$ est $\frac{11\pi}{30}$.

$$c) (\overline{CA}; \overline{CB}) = (\overline{CA}; \overline{BA}) + (\overline{BA}; \overline{CB}) \text{ d'après la relation de Chasles.}$$

$$\text{D'où : } (\overline{CA}; \overline{CB}) = (-\overline{AC}; -\overline{AB}) + (\overline{BA}; -\overline{BC})$$

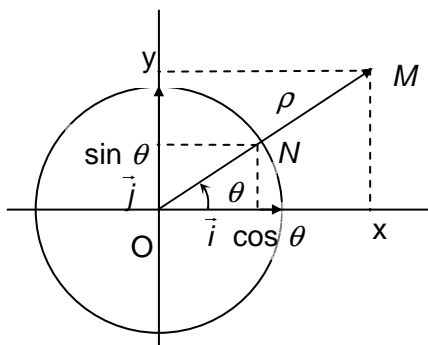
$$= (\overline{AC}; \overline{AB}) + (\overline{BA}; \overline{BC}) + \pi$$

$$= -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{5} + \pi = \frac{19\pi}{30}$$

Donc la mesure principale de $(\overline{CA}; \overline{CB})$ est $\frac{19\pi}{30}$.

Exercice 2

1) **Restitution organisée de connaissances :**



Soit (C) le cercle trigonométrique de centre O.

La demi-droite $[OM)$ coupe (C) en N.

N a pour coordonnées $(\cos \theta; \sin \theta)$.

Or $OM = \rho ON$; on en déduit que \overline{OM} a pour coordonnées $(\rho \cos \theta; \rho \sin \theta)$.

D'autre part : $OM^2 = x^2 + y^2 = \rho^2$.

$$2) \text{ a) } OM = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4.$$

$$\text{De plus, } x = 2 = 4 \times \frac{1}{2} = 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ et } y = 2\sqrt{3} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Par conséquent, **les coordonnées polaires de M dans le repère $(O; \vec{i})$ sont $\left(4; \frac{\pi}{3}\right)$.**

b) Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le point B a pour coordonnées $(1; 1)$.

Par conséquent, **les coordonnées polaires de B dans le repère $(O; \vec{i})$ sont $\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$.**

$$\text{c) } (\vec{i}; \overline{OP}) = (\vec{i}; \overline{OB}) + (\overline{OB}; \overline{OP}) = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}. \text{ De plus, } OP = 4.$$

Par conséquent, **les coordonnées polaires de P dans le repère $(O; \vec{i})$ sont $\left(4; \frac{2\pi}{3}\right)$.**

$$\text{Donc } x = 4 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \text{ et } y = 4 \times \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2.$$

Par conséquent, **le point P a pour coordonnées $(-2; 2)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.**

Exercice 3

$$1) \text{ On a : } \frac{9\pi}{10} = \pi - \frac{\pi}{10} \text{ et } \frac{6\pi}{10} = \pi - \frac{4\pi}{10}.$$

Or, pour tout réel θ , **$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$.**

$$\text{D'où : } \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \text{ et } \cos\left(\frac{6\pi}{10}\right) = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{10}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right).$$

$$\text{Par conséquent, } \mathbf{A} = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) = \mathbf{0}.$$

$$2) \text{ On a : } \frac{4\pi}{5} = 2\pi - \frac{6\pi}{5} \text{ et } \frac{2\pi}{5} = 2\pi - \frac{8\pi}{5}.$$

Or, pour tout réel θ , **$\sin(2\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.**

$$\mathbf{B} = -\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \mathbf{0}$$

Exercice 4

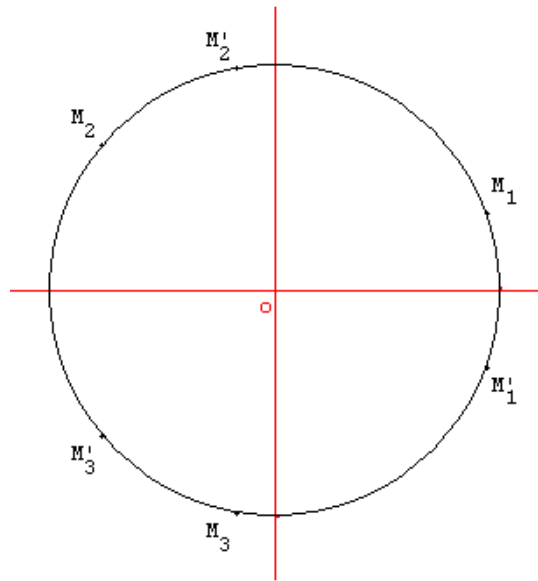
$$1) \cos(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\cos(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{9} \text{ ou } x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9} \text{ ou } x_3 = \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{9} \\ \text{ou} \\ x_1 = -\frac{\pi}{9} \text{ ou } x_2 = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{9} \text{ ou } x_3 = -\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{9} \end{cases}$$

Or la mesure principale de $\frac{13\pi}{9}$ est égale à $-\frac{5\pi}{9}$, et celle de $\frac{11\pi}{9}$ est égale à $-\frac{7\pi}{9}$.

Par conséquent, $S = \left\{ -\frac{7\pi}{9}; -\frac{5\pi}{9}; -\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9} \right\}$.



2) $\cos(3x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq 3x \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{\pi}{9}$. Par conséquent, $S = \left[-\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9} \right]$.

3) Posons $X = \cos(3x)$. Alors $2\cos^2(3x) + 3\cos(3x) - 2 = 0$ équivaut à $2X^2 + 3X - 2 = 0$.

Calculons le discriminant Δ de ce trinôme : $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, alors l'équation $2X^2 + 3X - 2 = 0$ admet deux solutions :

$$X_1 = \frac{-3-5}{4} = -2 \text{ et } X_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}.$$

Or l'équation $\cos(3x) = -2$ n'admet pas de solution, et l'équation $\cos(3x) = \frac{1}{2}$ admet 6 solutions d'après la question 1).

Donc $S = \left\{ -\frac{7\pi}{9}; -\frac{5\pi}{9}; -\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9} \right\}$.

Exercice 5

1) a) $Om = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{9} = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\theta_m) = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_m) = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ donc } \theta_m = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Par conséquent, **les coordonnées polaires de m sont $\left(3; \frac{5\pi}{6}\right)$.**

b) On remarque que $(\vec{i}; \overrightarrow{OM_2}) = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} = (\vec{i}; \overrightarrow{Om})$.

Par conséquent, **m appartient à d_2 .**

2) D'après les hypothèses, \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ont pour coordonnées respectives $(v_1 \cos(\alpha); v_1 \sin(\alpha))$ et $(v_2 \cos(-\alpha); v_2 \sin(-\alpha))$, c'est-à-dire $(v_1 \cos(\alpha); v_1 \sin(\alpha))$ et $(v_2 \cos(\alpha); -v_2 \sin(\alpha))$.

Or $v_1 = v_2 = 1 \text{ m.s}^{-1}$, et $\cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Donc, **\vec{v}_1 et \vec{v}_2 ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.**

3) a) Comme $\overrightarrow{OM_1} = t \vec{v}_1$, alors
$$\begin{cases} x_{M_1} - 0 = t \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_{M_1} - 0 = t \times \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Par conséquent, **M_1 a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}; \frac{t}{2}\right)$.**

Comme $\overrightarrow{mM_2} = t \vec{v}_2$, alors
$$\begin{cases} x_{M_2} - x_m = t \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_{M_2} - y_m = -t \times \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Par conséquent, **M_2 a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}(t-3)}{2}; \frac{-t+3}{2}\right)$.**

b) $M_1M_2 = \sqrt{(x_{M_2} - x_{M_1})^2 + (y_{M_2} - y_{M_1})^2} = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2t+3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{4t^2 - 12t + 9}{4}}$.

Par conséquent, **$M_1M_2 = \sqrt{t^2 - 3t + 9}$.**

4) a) Comme f est une fonction polynôme du second degré et que le coefficient du monôme x^2 est positif, alors **la fonction f admet un minimum atteint en $t = -\frac{b}{2a}$ avec $a=1$ et**

$b = -3$, c'est-à-dire en $t = \frac{3}{2}$.

b) On remarque que $M_1M_2 = \sqrt{f(t)}$. Comme les fonctions f et \sqrt{f} ont les mêmes variations sur $[0 ; +\infty[$, alors la distance M_1M_2 est minimale à l'instant $t = \frac{3}{2}$.

$$\text{Dans ce cas, } M_1M_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{2} + 9} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 9} = \sqrt{\frac{9 - 18 + 36}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Par conséquent, **les deux mobiles sont le plus proches l'un de l'autre lorsque $t = \frac{3}{2}$, et**

la distance minimale entre ces deux mobiles est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ mètres.