DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

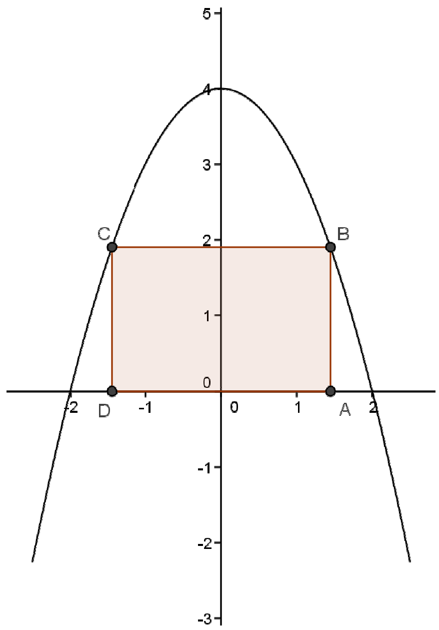
Applications de la dérivation et produit scalaire	***Le 12 mars 2010***

Durée du devoir surveillé : 110 minutes
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 (2 points)
Soit une fonction g dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0.
La condition « $g'(x_0)=0$ » est-elle une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un extremum local de la fonction g en x_0 ?

Exercice 2 (3 *points*)
Soit f la fonction définie sur $[-3\ ;\ 2]$ par $f(x)=2x^3-3x^2+\dfrac{1}{2}$.
Déterminer deux réels m et M tels que, pour tout x de $[-3\ ;\ 2]$, $m \le f(x) \le M$.
Remarque : on souhaite l'encadrement le « plus fin » possible de $f(x)$.

Exercice 3 (5 *points*)
On veut inscrire « à l'intérieur » de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=4-x^2$, un rectangle $ABCD$ d'aire maximale, les points A et D appartenant à l'axe des abscisses.



1) Démontrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie d'un tel rectangle.
2) On pose : $OA=x$.
a) Démontrer que l'aire totale $\mathscr{A}(x)$ d'un rectangle inscrit à l'intérieur de la parabole $\mathscr{P}$ s'exprime sous la forme $\mathscr{A}(x)=8x-2x^3$.
b) Étudier les variations de la fonction $\mathscr{A}$ sur $]0\ ;\ 2]$.
c) En déduire les dimensions du rectangle d'aire maximale inscrit à l'intérieur de la parabole $\mathscr{P}$.

Exercice 4 (3 *points*)

ABCD est un rectangle tel que $AB = a\sqrt{2}$ et $AD = a$, a étant un réel strictement positif.

1) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2) E étant le milieu de $[AB]$, démontrer que les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires.

Exercice 5 (5 *points*)

ABCD est un carré de côté 4 cm et de centre *O*. On note I le milieu de $[AB]$.
Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1) Faire une figure.
2) Déterminer et tracer, sur la figure précédente, l'ensemble (*E*) des points *M* tels que $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AM} = 2$.
3) a) Démontrer que, pour tout point *M*, $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB} = MI^2 - 4$.
   b) En déduire l'ensemble (*F*) des points *M* tels que $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB} = 4$.
   Tracer cet ensemble sur la figure précédente.

Exercice 6 (2 *points*)

ABCD est un carré de centre *O*. *M* est un point quelconque de la diagonale $[AC]$ distinct de *A* et *C*. *P* et *Q* sont les projetés orthogonaux de *M* sur $[AD]$ et $[DC]$.
Les droites (BQ) et (CP) semblent perpendiculaires. Pouvez-vous le justifier ?
Vous utiliserez la méthode qui vous convient.