CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Applications de la dérivation et produit scalaire	***Le 12 mars 2010***

Exercice 1

NON. En effet, la fonction dérivée de g, $g' : x \mapsto 3x^2$, s'annule en 0 mais ne change pas de signe. Cette fonction est strictement croissante sur **R**.

Exercice 2

La fonction f est dérivable sur **R** en tant que fonction polynôme, donc sur $[-3\ ;\ 2]$.

Pour tout réel x de $[-3\ ;\ 2]$, $f'(x) = 2\times 3x^2 - 3\times 2x + 0 = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

0 et 1 sont des racines du trinôme du second degré $6x^2 - 6x$; donc $f'(x)$ est du signe de $a = 6$ « en dehors des racines » et de $-a = -6$ « à l'intérieur des racines ».

On en déduit le tableau suivant :

x	-3		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-80{,}5$	$\nearrow$	$0{,}5$	$\searrow$	$-0{,}5$	$\nearrow$	$4{,}5$

En effet, $f(-3) = 2(-27) - 3\times 9 + \dfrac{1}{2} = -81 + 0{,}5 = -80{,}5$; $f(1) = 2 - 3 + \dfrac{1}{2} = -0{,}5$ et

$f(2) = 2\times 8 - 3\times 4 + \dfrac{1}{2} = 4{,}5$.

D'après le tableau de variations de f, on en déduit que :

pour tout x de $[-3\ ;\ 2]$, $-80{,}5 \le f(x) \le 4{,}5$.

Exercice 3

1) **R** est centré en O. Alors, pour tout réel x, $4 - (-x)^2 = 4 - x^2$.

La fonction f définie sur **R** par $f(x) = 4 - x^2$ est alors paire. D'où $\mathscr{P}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Par conséquent, **l'axe des ordonnées est un axe de symétrie d'un tel rectangle**.

2) a) $\mathscr{A}(x) = AB\times AD$.

D'après la question précédente, $AD = 2\times OA = 2x$. De plus, $AB = f(a) = 4 - a^2$.

Donc $\boldsymbol{\mathscr{A}(x)} = 2x\times(4 - x^2) \boldsymbol{= 8x - 2x^3}$.

b) La fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur **R**, donc sur $]0\ ;\ 2]$, en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel x, $\mathscr{A}'(x) = 8 - 2\times 3x^2 = 8 - 6x^2 = 2(4 - 3x^2) = 2(2 + \sqrt{3}x)(2 - \sqrt{3}x)$.

C. Lainé

Comme x appartient à $]0\,;\,2]$, alors $2+\sqrt{3}x>0$; d'où le signe de $\mathscr{A}'(x)$ dépend de celui de $\left(2-\sqrt{3}x\right)$. Or $2-\sqrt{3}x=0$ équivaut à $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

On en déduit le signe de $\mathscr{A}'(x)$:

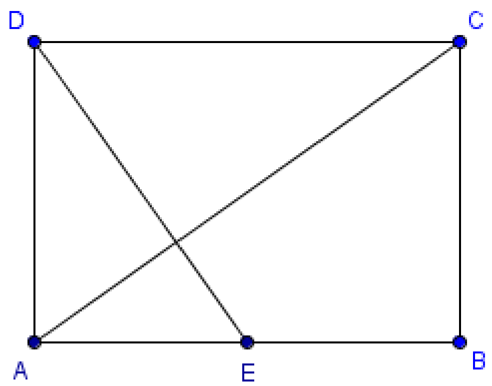
x	0		$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$		2
$\mathscr{A}'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Par conséquent, **la fonction $\mathscr{A}$ est strictement croissante sur $\left]0\,;\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,;2\right]$**.

c) D'après la question précédente, on en déduit que l'aire de $ABCD$ est maximale lorsque $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Dans ce cas : $AD=2x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ et $AB=4-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=4-\dfrac{4\times 3}{9}=4-\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$.

Le rectangle d'aire maximale inscrit à l'intérieur de la parabole $\mathscr{P}$ a pour largeur $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ et pour longueur $\dfrac{8}{3}$.

<u>Exercice 4</u>



1) • Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, alors $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}}=\left(-\overrightarrow{BA}\right)\bullet\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}\boldsymbol{=0}$.

• $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$, alors $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD}}=-\overrightarrow{AB}^2=-AB^2\boldsymbol{=-a\sqrt{2}}$.

• B est le projeté de C sur la droite (AB), alors $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2\boldsymbol{=a\sqrt{2}}$.

2) $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{DE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\bullet\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{AE}$.

Or $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}=0$ (d'après la question précédente),

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\bullet\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=\dfrac{1}{2}AB^2=\dfrac{1}{2}\times\left(a^2\times 2\right)=a^2$ (car E est le milieu de $[AB]$),

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC} \cdot \left(-\overrightarrow{BC}\right) = -\overrightarrow{BC}^2 = -BC^2 = -a^2$.

Alors, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = a^2 - a^2 = 0$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont orthogonaux.

Donc **les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires**.

Exercice 5

1) Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).

Si $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM} = 2$ alors $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH} = 2$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens.

Donc, $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH} = 2$ équivaut à $AB \times AH = 2$, c'est-à-dire à $AH = \frac{2}{AB} = \frac{1}{2}$.

Or $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{HM} = 2 + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{HM}$.

D'où : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM} = 2$ équivaut à $2 + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{HM} = 2$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{HM} = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont alors orthogonaux.

Par conséquent, **l'ensemble (*E*) des points *M* tels que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM} = 2$ est la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par *H* tel que *H* soit sur le segment $[AB]$ et $AH = \frac{1}{2}$**.

2) a) $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)$ d'après la relation de Chasles.

Alors, $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right)$ car I est le milieu de $[AB]$.

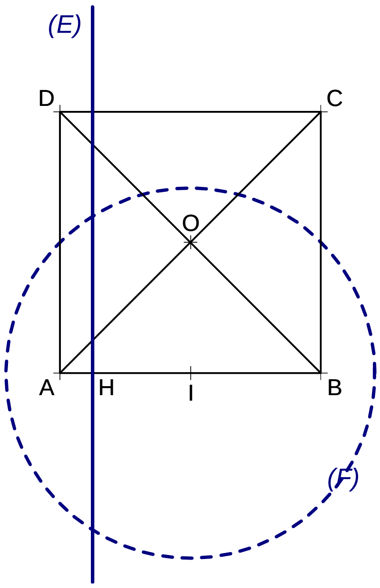
D'où, $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4} = MI^2 - 4$.

Par conséquent, **pour tout point *M*, $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = MI^2 - 4$**.

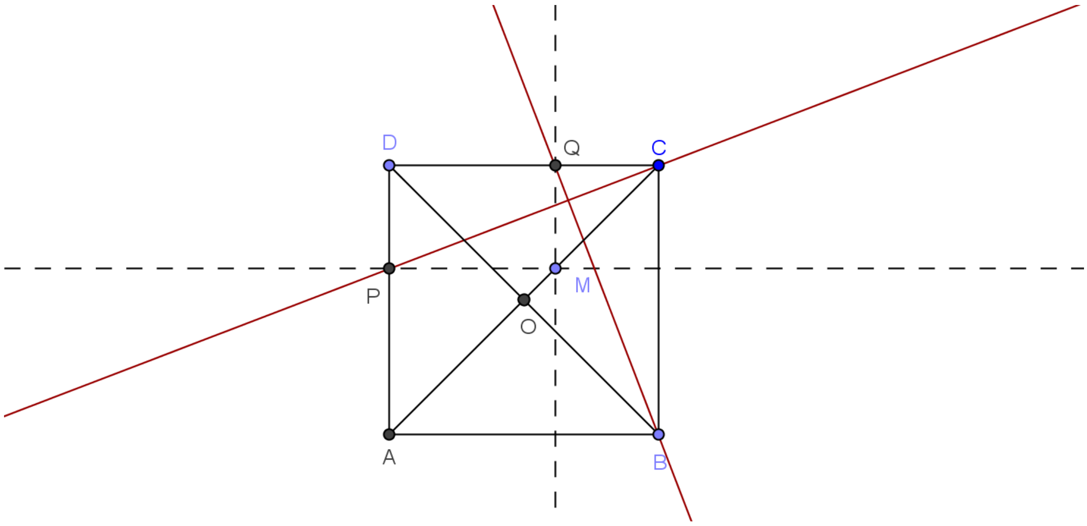
b) $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 4$ équivaut à $MI^2 - 4 = 4$ d'après la question précédente.

D'où $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 4$ équivaut à $MI^2 = 8$, ou encore à $MI = 2\sqrt{2}$.

Par conséquent, **l'ensemble (*F*) des points *M* tels que $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 4$ est le cercle de centre I et de rayon $2\sqrt{2}$.**



Exercice 6



Première méthode :

Utilisons le repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que $\overrightarrow{AB} = a\,\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC} = a\,\vec{j}$.

Soit M un point de coordonnées $(x ; y)$ dans ce repère.

Alors P et Q ont pour coordonnées respectives $(0 ; y)$ et $(x ; a)$.

Les points B et C ont pour coordonnées respectives $(a ; 0)$ et $(a ; a)$.

Donc $\overrightarrow{BQ}\bullet\overrightarrow{CP} = (x-a)(0-a)+(a-0)(y-a) = -ax+a^2+ay-a^2 = a(y-x)$.

Or M appartient à $[AC]$, d'où $y = x$. Donc $\overrightarrow{BQ}\bullet\overrightarrow{CP} = a(y-x) = a\times 0 = 0$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont orthogonaux, et par suite, **les droites (BQ) et (CP) semblent perpendiculaires**.

Seconde méthode :

$\overrightarrow{BQ}\bullet\overrightarrow{CP} = \left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}\right)\bullet\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DP}\right)$

$= \overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{CQ}\bullet\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CQ}\bullet\overrightarrow{DP}$

car $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DP}$ sont colinéaires et de sens contraires, et, $\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de même sens

$= 0 - BC\times DP + CQ\times CD + 0$

$= BC(-MQ+CQ)$

car M appartient à $[AC]$

$= BC\times 0 = 0$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont orthogonaux, et par suite, **les droites (BQ) et (CP) semblent perpendiculaires**.