

## DEVOIR SURVEILLÉ N° 9

*Calcul vectoriel dans l'espace et suites*

*Le 9 avril 2010*

**Durée du devoir surveillé : 110 minutes**  
**L'usage de la calculatrice est autorisé.**

### **Exercice 1** (2 points)

Étudier la monotonie des suites suivantes :

a)  $u_n = n - n^2 \quad (n \geq 0)$

b)  $u_n = \frac{2^n}{n} \quad (n \geq 2)$

### **Exercice 2** (4 points)

1) Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique. On sait que  $u_5 = 125$  et  $u_{16} = 48$ .

Calculer la raison et le premier terme de cette suite.

2) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

3) Pour quelle valeur de  $n$  a-t-on  $u_n = -127$  ?

4) À partir de quel rang a-t-on  $u_n \leq -250$  ?

5) Calculer la somme  $S = u_{1789} + u_{1790} + \dots + u_{2009}$ .

### **Exercice 3** (4 points)

Une suite  $(v_n)$  est définie par son premier terme  $v_0$ , et par  $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 4$ , pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ .

1) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(v_n)$ , selon que  $v_0 > 8$  ou que  $v_0 < 8$ .

2) La suite  $(u_n)$  est définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = v_n - 5$ .

Observer à la calculatrice les premiers rangs de la suite  $(u_n)$ . Quelle semble être la nature de la suite  $(u_n)$  ? est-elle arithmétique ? géométrique ? ni arithmétique, ni géométrique ? (justifier vos réponses)

3) Soit la suite  $(w_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $w_n = v_n - 8$ .

a) Montrer que  $(w_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire une expression de  $w_n$ , puis de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

4) Calculer la somme  $S = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ , puis la somme  $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  en fonction de  $n$ .

### **Exercice 4** (2 points)

La directrice d'une entreprise décide d'allouer à ses employés une prime de Noël d'un montant de 400 €, cette prime étant revalorisée chaque année de 6 €.

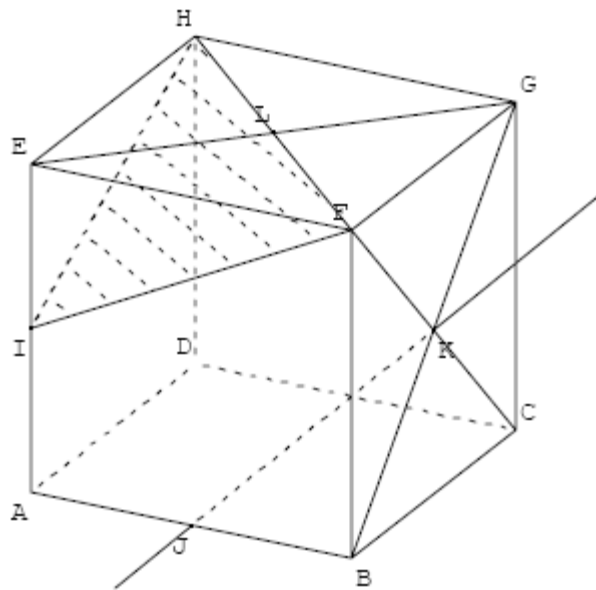
On note  $p_0$  la prime initiale  $p_n$  la prime au bout de  $n$  années.

1) Exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ .

2) Quel est le montant de la prime au bout de 10 ans ?

**Exercice 4** (8 points)

$ABCDEFGH$  est un cube,  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des arêtes  $[AE]$  et  $[AB]$ , et,  $K$  et  $L$  les centres respectifs des faces  $BCGF$  et  $EFGH$ .



- 1) **Cours** : Comment démontrer à l'aide des vecteurs qu'une droite est parallèle à un plan ?
- 2) Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{JK}$  et  $\overrightarrow{IL}$  en fonction de  $\overrightarrow{AG}$ .
- 3) Démontrer que la droite  $(JK)$  est parallèle au plan  $(IFH)$ .
- 4) a) **Cours** : Comment démontrer que trois vecteurs non nuls sont coplanaires ?  
b)  $\overrightarrow{JK}$ ,  $\overrightarrow{IF}$  et  $\overrightarrow{IH}$  sont-ils coplanaires ? Pourquoi ?
- 5) On considère dans cette question que le côté de ce cube a pour longueur 1.

Soit  $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  un repère de l'espace.

- a) Déterminer les coordonnées du centre de gravité  $S$  du triangle  $AHF$  et du centre de gravité  $T$  du triangle  $BDG$ .
- b) Démontrer que la droite  $(ST)$  est orthogonale au plan  $(AHF)$ .

