CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 9

Calcul vectoriel dans l'espace et suites	*Le 9 avril 2010*

Exercice 1

a) $u_{n+1}-u_n=\left(n+1-(n+1)^2\right)-\left(n-n^2\right)=n+1-n^2-2n-1-n+n^2=-2n$, pour tout n de **N**.
Or, pour tout n de **N**, $-2n\leq 0$.
Donc, $u_{n+1}\leq u_n$ pour tout n de **N**.
Par conséquent, **la suite (u_n) est décroissante**.

b) Tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs ; on peut alors comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}-1=\frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}}-1=2^{n+1-n}\times\frac{n}{n+1}-1=\frac{2n}{n+1}-1=\frac{n-1}{n+1}.$$

Comme n est entier naturel supérieur ou égal à 2, alors $\dfrac{n-1}{n+1}\geq 0$.

Donc, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1\geq 0$ pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2.

Par conséquent, **la suite (u_n) est croissante**.

Exercice 2

1) Comme (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tous entiers naturels p et q, $u_p-u_q=(p-q)\times r$.

D'où : $u_5-u_{16}=(5-16)\times r=-11r$, c'est-à-dire $\boldsymbol{r}=\dfrac{125-48}{-11}\boldsymbol{=-7}$.

De même, $u_0-u_5=(0-5)\times r=-5\times(-7)=35$, d'où : $\boldsymbol{u_0}=35+125\boldsymbol{=160}$.

2) Comme (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0=160$ et de raison $r=-7$, alors, pour tout entiers naturel n, $\boldsymbol{u_n}=u_0+nr\boldsymbol{=160-7n}$.

3) $u_n=-127$ équivaut à $160-7n=-127$, c'est-à-dire à $-7n=-287$.
Par conséquent, $\boldsymbol{u_n=-127}$ **lorsque** $\boldsymbol{n=41}$.

4) $u_n\leq -250$ équivaut à $160-7n\leq -250$, c'est-à-dire à $-7n\leq -410$, ou encore à $n\geq\dfrac{410}{7}$.

Comme n est un entier naturel, alors $u_n\leq -250$ à partir du rang 59.

5) $S=u_{1789}+u_{1790}+\ldots+u_{2009}=221\times\dfrac{u_{1789}+u_{2009}}{2}$

Or $u_{1789}=160-7\times1789=-12363$ et $u_{2009}=160-7\times2009=-13903$.
Alors $\boldsymbol{S=-2\,902\,393}$.

Exercice 3
1) Voir fichier Excel.
Lorsque $v_0 > 8$, la suite (v_n) semble être décroissante.
Lorsque $v_0 < 8$, la suite (v_n) semble être croissante.

2) Voir fichier Excel.
La suite (u_n) ne semble être ni arithmétique, ni géométrique.

Comme $u_{n+1} - u_n$ (voir fichier Excel) n'est pas une constante pour tout entier naturel n, alors **(u_n) n'est pas arithmétique**.

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (voir fichier Excel) n'est pas une constante pour tout entier naturel n, alors **(u_n) n'est pas géométrique**.

3) a) Soit n un entier naturel. $w_{n+1} = v_{n+1} - 8 = \frac{1}{2}v_n + 4 - 8 = \frac{1}{2}v_n - 4 = \frac{1}{2}(v_n - 8) = \frac{1}{2}w_n$.
Par conséquent, **(w_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 - 8$ et de raison $q = \frac{1}{2}$**.

b) On en déduit que, **pour tout entier naturel n, w_n** $= w_0 \times q^n$ **$= (v_0 - 8) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$**.

Comme $w_n = v_n - 8$, alors, **v_n** $= w_n + 8$ **$= 8 + (v_0 - 8) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout entier naturel n**.

4) • $S = w_0 + w_1 + ... + w_n = w_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = (v_0 - 8) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$.

Par conséquent, **$S = 2(v_0 - 8) \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$**.

• $S' = v_0 + v_1 + ... + v_n = (w_0 + 8) + (w_1 + 8) + ... + (w_n + 8) = S + 8(n+1)$.
Par conséquent, **$S' = 8(n+1) + 2(v_0 - 8) \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$**.

Exercice 4
1) Comme chaque année a prime est revalorisée de 6 €, alors **pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = p_n + 6$**.

2) On en déduit que la suite (p_n) est une suite arithmétique de premier terme $p_0 = 400$ et de raison $r = 6$. Par suite, pour tout n de **N**, **p_n** $= p_0 + n \times r$ **$= 400 + 6n$**.

Le montant de la prime au bout de 10 ans est égale à p_{10}. Or $p_{10} = 400 + 10 \times 6 = 460$.
Par conséquent, **le montant de la prime au bout de 10 ans est de 460 €**.

Exercice 5

1) **Pour démontrer qu'une droite est parallèle à un plan, il suffit de trouver un vecteur $\overrightarrow{MN}$ colinéaire à un vecteur directeur de la droite, avec M et N deux points dans ce plan**.

2) • $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BK}$ d'après la relation de Chasles.

Or J est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{JB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; et K est le milieu de $[BG]$ car K est le centre de la face $BCGF$, alors $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{JK}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}\boldsymbol{=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}}$.

• $\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EG}$ d'après la relation de Chasles.

Or I est le milieu de $[AE]$, alors $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$; et L est le milieu de $[EG]$ car L est le centre de la face $EFGH$, alors $\overrightarrow{EL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{IL}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}\boldsymbol{=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}}$.

3) L est le centre de la face $EFGH$, alors L est le milieu de $[HF]$; d'où, L appartient au plan (IFH). De plus, I appartient au plan (IFH).

D'après la question 2), on en déduit que $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{IL}$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{JK}$ est colinéaire à $\overrightarrow{IL}$.

Par conséquent, d'après la question 1), on conclut que **la droite (JK) est parallèle au plan (IFH)**.

4) a) **Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.**
Dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\vec{w}=a\,\vec{u}+b\,\vec{v}$.

b) Les points I, F et H ne sont pas alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IH}$ ne sont pas colinéaires.
D'après la question 3), $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{IL}$.
Or L est le milieu de $[HF]$; d'où, $\overrightarrow{IL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IH}$. On en déduit que $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IH}$, et $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IH}$ ne sont pas colinéaires.
Par conséquent, d'après la question 4) a), on conclut que **$\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IH}$ sont coplanaires**.

5) a) Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$, les points A, B, D, F, G et H ont pour coordonnées respectives $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

Comme S est le centre de gravité du triangle AHF, alors $\begin{cases} \boldsymbol{x_S} = \dfrac{x_A + x_H + x_F}{3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}} \\ \boldsymbol{y_S} = \dfrac{y_A + y_H + y_F}{3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}} \\ \boldsymbol{z_S} = \dfrac{z_A + z_H + z_F}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$.

Comme T est le centre de gravité du triangle BDG, alors $\begin{cases} \boldsymbol{x_T} = \dfrac{x_B + x_D + x_G}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}} \\ \boldsymbol{y_T} = \dfrac{y_B + y_D + y_G}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}} \\ \boldsymbol{z_T} = \dfrac{z_B + z_D + z_G}{3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}} \end{cases}$.

b) On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{ST}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right)$.

- $x_{\overrightarrow{ST}} \times x_{\overrightarrow{AH}} + y_{\overrightarrow{ST}} \times y_{\overrightarrow{AH}} + z_{\overrightarrow{ST}} \times z_{\overrightarrow{AH}} = \dfrac{1}{3}\times 0 + \dfrac{1}{3}\times 1 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)\times 1 = 0$; d'où les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux, et, par suite, les droites (ST) et (AH) sont orthogonales.
- $x_{\overrightarrow{ST}} \times x_{\overrightarrow{AF}} + y_{\overrightarrow{ST}} \times y_{\overrightarrow{AF}} + z_{\overrightarrow{ST}} \times z_{\overrightarrow{AF}} = \dfrac{1}{3}\times 1 + \dfrac{1}{3}\times 0 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)\times 1 = 0$; d'où les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux, et, par suite, les droites (ST) et (AF) sont orthogonales.

Comme (ST) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AHF), alors **la droite (ST) est orthogonale au plan (AHF)**.