

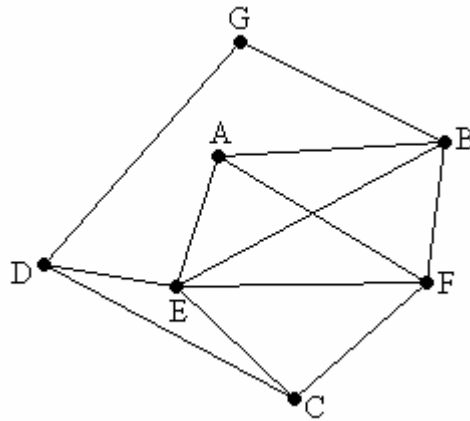
CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Graphes

Le 17 octobre 2007

Exercice 1

1)



2) Le sous-graphe complet d'ordre maximal est le sous graphe $\{A, B, E, F\}$ qui est d'ordre 4.

Exercice 2

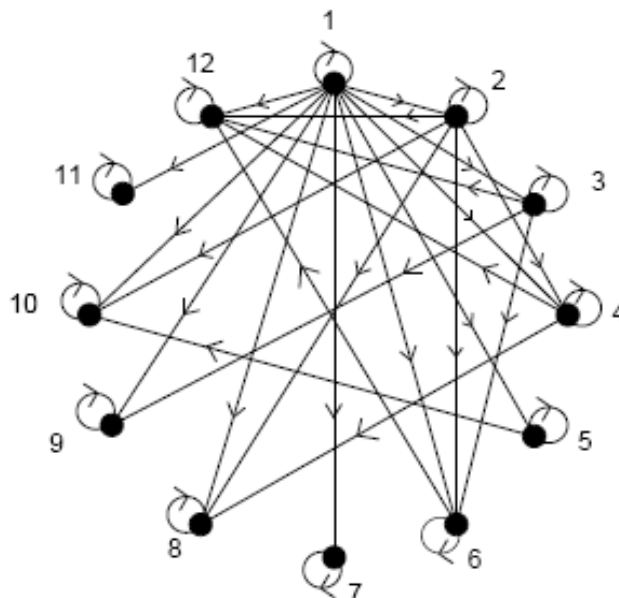
1)

Secteur	A	B	C	D	E	F
Degré	4	3	4	4	3	2

2) Ce graphe est connexe car, pour chaque paire de sommets, il existe une chaîne reliant les deux sommets.

Exercice 3

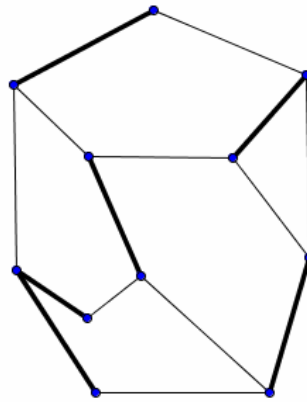
Il ne faut pas oublier les « boucles » car tout entier est un diviseur de lui-même.
Il faut construire un graphe orienté car 3 divise 12, mais 12 ne divise pas 3.



Exercice 4

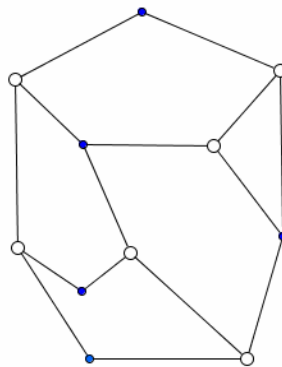
1) Chaque gardien va être placé sur une arête et pourra surveiller deux carrefours (sommets). Le graphe ayant 11 sommets, **il faudra au minimum 6 gardiens afin que tous les carrefours soient surveillés.**

Il faut donc trouver un ensemble d'au moins six arêtes, tel que tout sommet est incident à au moins l'une de ces arêtes. Le schéma ci-dessous donne une solution (arêtes épaisses).



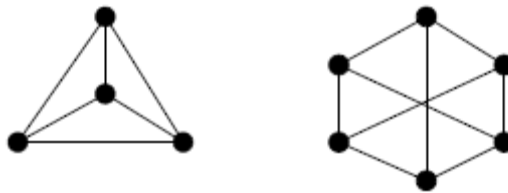
2) Cette fois, les gardiens sont sur les sommets et surveillent les arêtes. Il faut trouver un ensemble minimal de sommets tel que toute arête est incidente à au moins l'un de ces sommets. **6 gardiens sont nécessaires pour surveiller tous les couloirs**

Le schéma ci-dessous donne une solution utilisant 6 sommets (sommets blancs).



Exercice 5

1) On n'arrive qu'à construire que deux graphes ayant respectivement 4 et 6 sommets de degré 3.



2) On peut conjecturer qu'il n'existe pas de graphes dont tous les sommets sont de degré 3 et qui ont un nombre impair de sommets.

3) Soit un graphe possédant n sommets de degré 3.

Alors la somme des degrés de tous les sommets de ce graphe est égale à $3n$.

Or cette somme est égale au double du nombre d'arêtes de ce graphe.

Donc le nombre d'arêtes d'un tel graphe est égal à $\frac{3n}{2}$, et $\frac{3n}{2}$ est un entier qu'à la condition

où n est un entier pair.

Par conséquent, **il n'existe pas de graphes dont tous les sommets sont de degré 3 et qui ont un nombre impair de sommets.**