

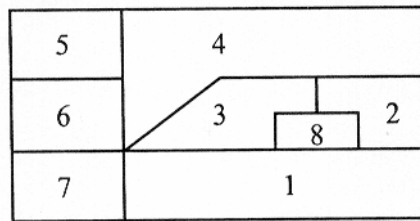
DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Graphes

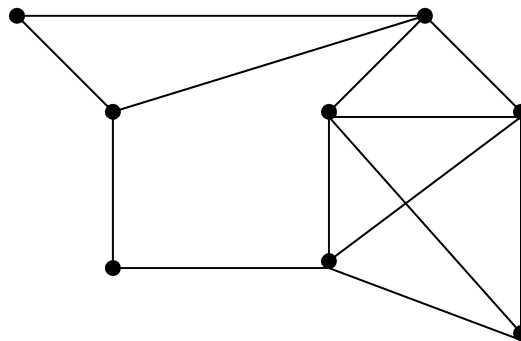
Le 21 novembre 2007

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. N'oubliez pas de souligner (ou d'encadrer) vos résultats.

Huit pays sont représentés ci-dessous avec leurs frontières (deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points communs, ne sont pas considérés comme voisins).



- 1) a) Représenter cette situation par un graphe dont le modèle est ci-dessous et est à compléter.
- b) Que représentent les sommets de ce graphe ? Que représentent les arêtes de ce graphe ?



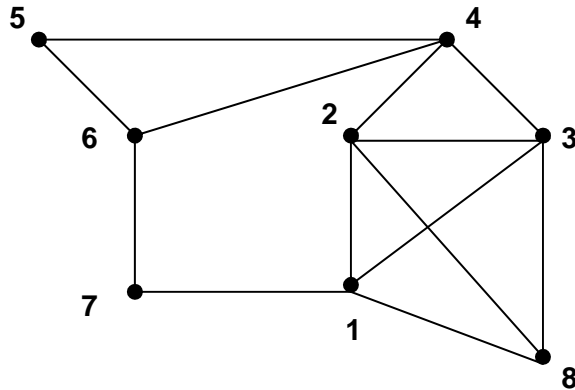
- 2) a) Quel est l'ordre de ce graphe ? Est-il complet ? Connexe ?
- b) Quel est le degré de chaque sommet ? En déduire le nombre d'arêtes.
- 3) a) Quelle est la distance entre les sommets 1 et 5 ?
- b) Quel est le diamètre de ce graphe ?
- 4) a) Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule ? Justifier votre réponse.
- b) Est-il possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays ? Justifier votre réponse.
- 5) Établir une coloration de **la carte** en utilisant un nombre minimum de couleurs de telle façon que deux pays voisins portent deux couleurs différentes. Justifier votre réponse.
- 6) Quel est le nombre maximum de pays sans frontière commune ? Préciser de quels pays il s'agit.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Graphes

Le 21 novembre 2007

1) a)



b) **Les sommets de ce graphe représentent les pays, et les arêtes représentent les frontières entre deux pays.**

2) a) L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets. Donc **l'ordre de ce graphe est 8.**

Le graphe n'est pas complet car les sommets 5 et 7 ne sont pas adjacents.

Le graphe est connexe car pour toute paire de sommets, il existe une chaîne les reliant.

b)

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	4	4	4	4	2	3	2	3

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes. **Il y a donc 13 arêtes.**

3) a) **La distance entre les sommets 1 et 5 est égale à 3.** En effet, la distance entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient.

b) Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets. Donc, **le diamètre de ce graphe est 4.**

4) a) Il est possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule, que si il existe un cycle eulérien dans le graphe.

Or il n'y a pas de cycle eulérien car il existe deux sommets de degré impair.

Par conséquent, **il n'est pas possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule.**

b) Répondre à cette question revient à voir si il existe une chaîne eulérienne dans ce graphe. Or il y a deux sommets de degré impair ; donc il existe une chaîne eulérienne entre les sommets 6 et 8.

Par conséquent, **il est possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays (entre les pays 7 et 8).**

5) On sait que le nombre chromatique est inférieur ou égal à $D + 1$, où D est le plus le plus haut degré du graphe. Donc le nombre chromatique est inférieur ou égal à 5.

De plus, le sous-graphe 1 – 2 – 3 – 8 est un sous graphe complet de nombre chromatique 4.

Par conséquent, le nombre chromatique est compris entre 4 et 5.

Utilisons l'algorithme de coloration de Welch Powell.

Classons les sommets par ordre de degré décroissant.

On donne une couleur au 1^{er} sommet.

Ensuite, on regarde le sommet suivant ; si il est adjacent à un des sommets précédents, on lui associe une autre couleur ; si ce n'est pas le cas, on lui associe la même couleur.

Et ainsi de suite jusqu'au dernier sommet.

Sommet	1	2	3	4	6	8	7	5
Degré	4	4	4	4	3	3	2	2
Numéro de la couleur	1	2	3	1	2	4	3	3

Il faut donc 4 couleurs pour colorier ce graphe.

6) D'après la question précédente, il y a 4 blocs de pays qui n'ont pas de frontières communes.

Le nombre maximum de pays sans frontière commune est 3 : ce sont les pays 3, 5 et 7.