CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 4	
Suites	***Le 6 février 2008***

Exercice 1

1) Comme n^2 est positif pour tout entier naturel, alors pour tout n de **N**, $u_n \geq 2$.
Donc, la suite (u_n) est minorée par 2.
La réponse correcte est la C.

2) Comme son argent est placé à intérêts composés, alors (C_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$ et de premier terme $C_0 = 5000$.
Alors, pour tout entier n, $C_n = 5000 \times (1{,}03)^n$.
Par suite, le 1er janvier 2010, Julie disposera d'un capital égal à $C_{10} \simeq 6719{,}58$.
La réponse correcte est la C.

3) $v_{n+1} - v_n = \left(-2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - \left(-2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left[\left(\frac{2}{3}\right) - 1\right] = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.
On en déduit que $v_{n+1} - v_n > 0$, pour tout n de **N**. Par suite, la suite (v_n) est croissante.
La réponse correcte est la C.

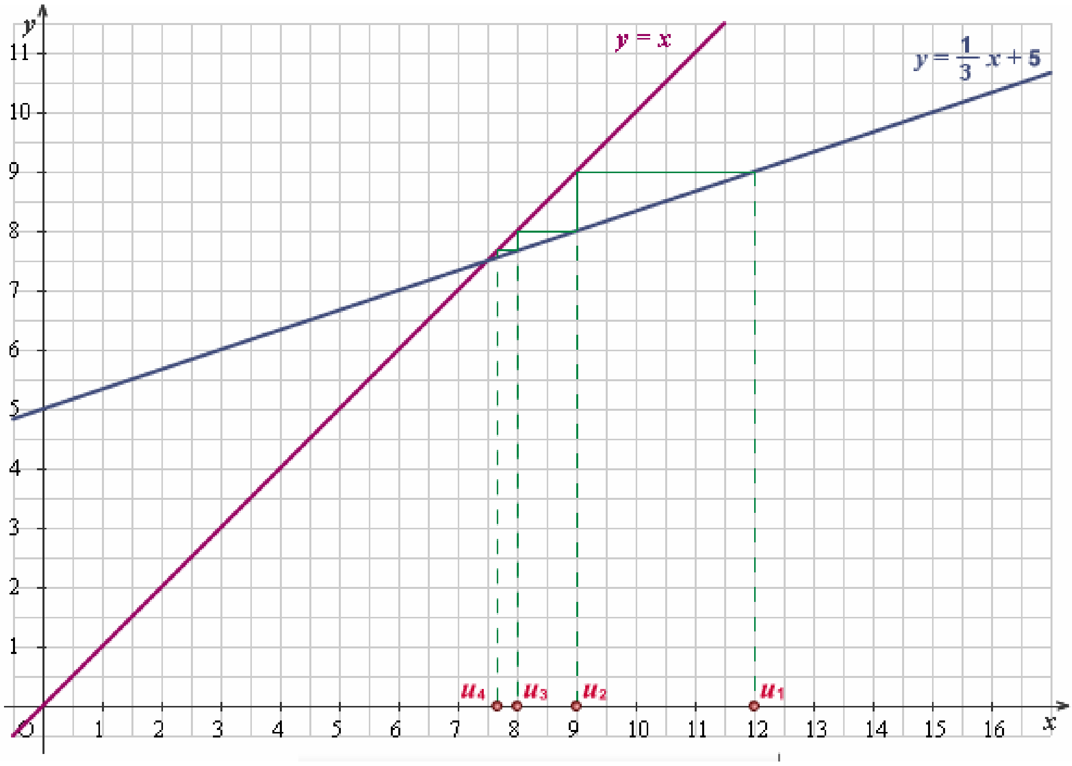
4) Comme (u_n) est une suite arithmétique de raison -3 telle que $u_1 = 77$, alors
$u_n = u_1 + (n-1) \times r = 77 - 3(n-1) = 80 - 3n$, pour tout entier naturel n.
D'où : $u_{50} = 80 - 3 \times 50 = -70$.
La réponse correcte est la D.

5) Comme (u_n) est une suite arithmétique de raison -5, alors $u_n - u_p = (n-p) \times (-5)$, pour tous entiers naturels n et p. D'où : $u_3 - u_7 = (3-7) \times (-5) = 20$, et par suite, $u_3 = u_7 + 20$.
La réponse correcte est la C.

6)
$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-5} \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq \ln\left(10^{-5}\right) \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{n} \times \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln\left(10^{-5}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{n} \times (-\ln 2) \leq \ln\left(10^{-5}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(10^{-5}\right)}{-\ln 2} \quad \text{car } (-\ln 2) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad n \geq 16{,}6
\end{aligned}$$
La réponse correcte est la C.

Exercice 2 *La Réunion, juin 2006*

1) Pour obtenir la représentation des termes de la suite :
- on place le terme initial $u_1 = 12$ sur l'axe des abscisses ;
- comme $u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 5 = 9$, alors u_2 est l'ordonnée du point de la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + 5$ d'abscisse 12 ;
- en utilisant la droite d'équation $y = x$, on « ramène » la valeur u_2 sur l'axe des abscisses ;
- on refait la même chose pour représenter les termes u_3 et u_4.



Il semble que la suite (u_n) converge vers 7,5.

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{15}{2} = \left(\frac{1}{3}u_n + 5\right) - \frac{15}{2} = \frac{1}{3}u_n - \frac{5}{2} = \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{15}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n$.

Comme $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$, pour tout entier naturel n non nul, alors **la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$**.

b) Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{15}{2} = 12 - \frac{15}{2} = \frac{9}{2}$, alors **pour tout entier naturel n non nul,**

$\boldsymbol{v_n} = v_1 \times q^{n-1} \boldsymbol{= \frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$.

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Or $-1 < \frac{1}{3} < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \mathbf{0}$.

Comme $v_n = u_n - \frac{15}{2}$, alors pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = v_n + \frac{15}{2}$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$; par somme des limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{15}{2}$.

3)
a) $u_n - \frac{15}{2} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow v_n \leq 10^{-6}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leq 10^{-6}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leq \frac{2\times10^{-6}}{9}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \leq \ln\left(\frac{2\times10^{-6}}{9}\right)$ car la fonction ln est strictement croissante

$\Leftrightarrow (n-1)\ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq \ln\left(\frac{2\times10^{-6}}{9}\right)$

$\Leftrightarrow (n-1) \geq \frac{\ln\left(\frac{2\times10^{-6}}{9}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$ car $\ln\left(\frac{1}{3}\right) < 0$

$\Leftrightarrow (n-1) \geq \frac{\ln\left(\frac{2\times10^{-6}}{9}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$

$\Leftrightarrow n \geq 1+\frac{\ln\left(\frac{2\times10^{-6}}{9}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$

Or $1+\frac{\ln\left(\frac{2\times10^{-6}}{9}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \simeq 14{,}9$ et n est un entier naturel ; il suffit de prendre n supérieur ou égal à 15. Donc, $\boldsymbol{u_n - \frac{15}{2} \leq 10^{-6}}$ **dès que** $\boldsymbol{n \geq 15}$.

b) $u_n - \frac{15}{2} \geq 10^6 \Leftrightarrow v_n \geq 10^6$.

Or (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = \frac{9}{2}$, alors (v_n) est décroissante. Donc, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n \leq v_1$, c'est-à-dire $v_n \leq \frac{9}{2}$.

Par conséquent, **il n'existe pas d'entier n tel que** $\boldsymbol{u_n - \frac{15}{2} \geq 10^6}$.