

DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Graphes probabilistes

Le 26 mars 2008

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. N'oubliez pas de souligner (ou d'encadrer) vos résultats.

Exercice donné au Bac en France, en septembre 2005

Mademoiselle Z travaille dans une société spécialisée dans la vente par téléphone. Chaque jour, elle doit appeler une liste de clients pour leur proposer un produit particulier. Après avoir observé un grand nombre d'appels de Mademoiselle Z, on peut faire l'hypothèse suivante :

- si un client contacté répond favorablement (situation A), cela donne de l'assurance à Mademoiselle Z et elle arrive à convaincre le client suivant une fois sur deux ;
- si le client contacté ne répond pas favorablement (situation B), Mademoiselle Z se décourage et n'arrive à convaincre le client suivant qu'une fois sur cinq.

1) a) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

b) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2) Ce lundi, Mademoiselle Z est en forme et elle a convaincu le premier client d'acheter le produit proposé. La matrice ligne décrivant l'état initial au premier appel est donc $P_0 = (1 \ 0)$.

Donner la matrice ligne P_1 exprimant l'état probabiliste au deuxième appel.

3) On donne la matrice $M^5 = \begin{pmatrix} 0,28745 & 0,71255 \\ 0,28502 & 0,71498 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit $P_0 M^5$. En déduire la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client ce lundi.

b) Quelle aurait été la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client si elle n'avait pas convaincu le premier ?

4) Déterminer l'état stable du système. Comment peut-on l'interpréter ?