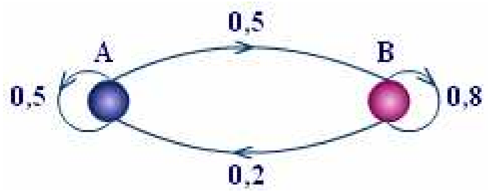
CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 5	
Graphes probabilistes	***Le 26 mars 2008***

<u>Exercice 1</u>

1) a) Si un client contacté répond favorablement (situation A), cela donne de l'assurance à Mademoiselle Z et elle arrive à convaincre le client suivant une fois sur deux ; d'où la probabilité de rester dans l'état A est égale à $\frac{1}{2}=0,5$. Alors la probabilité de passer de l'état A à l'état B est donc égale à $1-0,5=0,5$.

Si le client contacté ne répond pas favorablement (situation B), Mademoiselle Z se décourage et n'arrive à convaincre le client suivant qu'une fois sur cinq ; la probabilité de passer de l'état B à l'état A est donc égale à $\frac{1}{5}=0,2$. Alors la probabilité de rester dans l'état B est donc égale à $1-0,2=0,8$.



b) « **La matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre *n* est de dimension *n* × *n*. Le terme à l'intersection de la i$^{\text{ème}}$ ligne et de la j$^{\text{ième}}$ colonne a pour valeur le poids de l'arête orientée allant de *i* vers *j* si cette arête existe, 0 sinon.** »

Par conséquent, **la matrice de transition *M* de ce graphe est** $\boldsymbol{M=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}}$.

2) L'état probabiliste initial est $P_0=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.

Au deuxième appel, l'état probabiliste est $P_1=P_0\times M$.

Or $P_1=\begin{pmatrix}1\times 0,5+0\times 0,2 & 1\times 0,5+0\times 0,8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix}$.

Par conséquent, **l'état probabiliste au deuxième appel est donnée par la matrice** $\boldsymbol{P_1=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix}}$.

3) a) On utilise la propriété : « **Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste à *n* sommets, si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial et P_n l'état probabiliste à l'étape *n*, on a $P_n = P_0 \times M^n$.** »

Or $M^5=\begin{pmatrix}0,28745 & 0,71255\\ 0,28502 & 0,71498\end{pmatrix}$; d'où :

$P_5=\begin{pmatrix}1\times 0,28745+0\times 0,28502 & 1\times 0,71255+0\times 0,71498\end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$P_5=\begin{pmatrix}0,28745 & 0,71255\end{pmatrix}$.

Comme P_5 est la matrice exprimant l'état probabiliste au 6$^{\text{ème}}$ appel, on en déduit que **la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client ce lundi est égale à 0,28745**.

b) Si Mademoiselle Z ne convainc pas son premier client, alors la matrice ligne décrivant l'état initial au premier appel est donc $Q_0=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$.

Donc l'état probabiliste au sixième appel est exprimé par la matrice $Q_5=Q_0M^5$.

Or $Q_5 = \begin{pmatrix} 0\times 0,28745+1\times 0,28502 & 0\times 0,71255+1\times 0,71498 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,28502 & 0,71498 \end{pmatrix}$.
Par conséquent, **la probabilité que, Mademoiselle Z convainque son sixième client si elle n'avait pas convaincu le premier, est égale à 0,28502**.

4) On utilise le théorème : « **Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l'état P_n à l'étape n converge vers un état $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ indépendant de l'état initial P_0. De plus, P vérifie P = PM telle que $x + y = 1$.** »

On est donc amené à résoudre le système $\begin{cases} x+y=1 \\ x=0,5x+0,2y \\ y=0,5x+0,8y \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x+y=1 \\ 0,5x-0,2y=0 \\ 0,5x-0,8y=0 \end{cases}$,

ou encore $\begin{cases} x+y=1 \\ 0,5x-0,2y=0 \end{cases}$.

$\begin{cases} x+y=1 \\ 0,5x-0,2y=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=1-y \\ 0,5(1-y)-0,2y=0 \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} y=\dfrac{0,5}{0,7}=\dfrac{5}{7} \\ x=1-y=1-\dfrac{5}{7}=\dfrac{2}{7} \end{cases}$.

On obtient la solution $\left(\dfrac{2}{7}\ ;\ \dfrac{5}{7}\right)$.

Par conséquent, **l'état stable du système est : $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{7} & \dfrac{5}{7} \end{pmatrix}$**.

Alors, **que Mademoiselle Z ait convaincu ou pas son premier client, la probabilité de convaincre son nième client est égale à $\dfrac{2}{7}$**.