

Exercice 2 : (5 points)

Réservé aux élèves ayant suivi la spécialité

Dans une zone de marais on s'intéresse à la population des libellules.

On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.

Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$(R) \text{ Pour tout entier naturel } n \text{ on a : } P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n).$$

On suppose que $P_0 = 40\,000$ et $P_1 = 60\,000$.

On définit l'accroissement de la population pendant la n -ième année par la différence

$$P_n - P_{n-1}.$$

1) Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire P_2 et P_3 .

2) On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \text{ et } V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n$$

a) Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

Exprimer U_n en fonction de n .

b) En utilisant la relation (R), calculer $V_{n+1} - V_n$.

En déduire que, pour tout n , on a : $V_n = P_1 - \frac{1}{2}P_0$. Calculer V_n .

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $P_n = 2(V_n - U_n)$. En déduire une expression de P_n en fonction de n .

d) Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.

Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand?