1) Si $M(x\ ;y\ ;z)$ appartient à (S), alors on a $x^2+y^2-z^2=1$, où x, y et z sont des réels.
Alors $x^2+y^2-(-z)^2=x^2+y^2-z^2=1$, c'est-à-dire que le point M' de coordonnées $(x\ ;y\ ;-z)$ appartient également à (S).
On montre de même la réciproque : si le point $M(x\ ;y\ ;-z)$ appartient à (S), le point $M'(x\ ;y\ ;z)$ appartient aussi à (S).
Par conséquent, **le plan d'équation $z=0$, c'est-à-dire le plan (xOy), est un plan de symétrie de la surface (S).**

2) a) $M(x\ ;y\ ;z)\in(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ où k est un réel

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=-4k \\ y-1=0k \\ z+3=4k \end{cases},\ \text{avec } k\in\mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4k+3 \\ y=1 \\ z=4k-3 \end{cases},\ \text{avec } k\in\mathbf{R}$$

Donc $\begin{cases} \boldsymbol{x=-4k+3} \\ \boldsymbol{y=1} \\ \boldsymbol{z=4k-3} \end{cases}$, **avec $k\in\mathbf{R}$, est une représentation paramétrique de la droite (D).**

b) Soit $M(x\ ;y\ ;z)$ un point de la droite (D). D'après la question précédente,
$x^2+y^2-z^2=(-4k+3)^2+1^2-(4k-3)^2=16k^2-24k+9+1-16k^2+24k-9=1$.
On en déduit alors que ce point M appartient à (S), ou encore que tout point de (D) appartient à (S). Par conséquent, **la droite (D) est incluse dans la surface (S).**

3) Soit $\mathscr{P}$ un plan parallèle au plan (xOy). $\mathscr{P}$ a alors une équation de la forme $z=c$, où c est un réel.

$$M(x\ ;y\ ;z)\in(S)\cap\mathscr{P} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ z=c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-c^2=1 \\ z=c \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=c^2+1 \\ z=c \end{cases}$$

Or $x^2+y^2=c^2+1$ est une équation d'un cercle de centre $\Omega(0\ ;0\ ;c)$ et de rayon $\sqrt{1+c^2}$, tracé dans $\mathscr{P}$. Donc, **la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy) est un cercle**.

4) a) Soit (C) la courbe d'intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z=68$.
D'après la question précédente, **(C) est le cercle $\Omega(0\ ;0\ ;68)$ et de rayon $\sqrt{1+68^2}=5\sqrt{185}$, tracé dans le plan d'équation $z=68$.**

b) Soit $(a\ ;\ b)$ une solution de (1). Alors : $\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a\ ;\ b) = 440 \end{cases}$.

Soit d le PGCD de a et b. Alors d divise a (et aussi a^2) et divise b (et aussi b^2), d'où d divise $a^2 + b^2\ x + y$, c'est-à-dire d divise 4625.
De plus, d divise le PPCM de a et b. Donc d divise 440.
Par suite, d est un diviseur commun de 440 et de 4625.
Or les diviseurs de 4625 sont : **1** ; **5** ; 25 ; 37 ; 125 ; 185 ; 925 et 4625.
Les diviseurs de 440 sont : **1** ; 2 ; 4 ; **5** ; 8 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 40 ; 44 ; 55 ; 88 ; 110 ; 220 et 440. Donc, d est égal à 1 ou à 5.
Par conséquent, **si $(a\ ;\ b)$ est solution de (1) alors pgcd$(a\ ;\ b)$ est égal à 1 ou 5**.

• Supposons que $d = 1$; alors $ab = \text{pgcd}(a\ ;\ b) \times \text{ppcm}(a\ ;\ b)$, c'est-à-dire $ab = 1 \times 440 = 440$.
On en déduit que a et b sont des diviseurs de 440 dont la somme de « leurs carrés » est égale à 4625 et le produit à 440.
Or $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4625 + 880 = 5505$; ce qui est impossible car $a+b$ est un entier naturel (en tant que somme de deux entiers naturels).
Il n'y a donc dans cas aucun couple solution de ce système.

• Supposons que $d = 5$; alors $ab = \text{pgcd}(a\ ;\ b) \times \text{ppcm}(a\ ;\ b)$, c'est-à-dire $ab = 5 \times 440 = 2200$.
On en déduit que a et b sont des diviseurs de 440 dont la somme de « leurs carrés » est égale à 4625 et le produit à 2200.
Or $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4625 + 4400 = 9025$; d'où : $a + b = 95$.
De plus les diviseurs de 440 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 40 ; 44 ; 55 ; 88 ; 110 ; 220 et 440. Donc, seul le couple $(40\ ;\ 55)$ est solution de ce système dans ce cas.

Par conséquent, **il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et ppcm$(a\ ;\ b) = 440$**.