

1) Une similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ est la composée d'une homothétie de centre Ω et de rapport k , et de la rotation de centre Ω et d'angle θ .

Or :

- le rapport de s est égal à $\left| \frac{3}{2}(1-i) \right| = \frac{3}{2} \times |1-i| = \frac{3}{2} \times \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

- la mesure de l'angle θ est l'argument de $\frac{3}{2}(1-i)$.

$$\arg\left(\frac{3}{2}(1-i)\right) = \arg\left(\frac{3}{2}\right) + \arg(1-i) + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$= 0 + \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

- le point Ω est un point invariant par s : résolvons l'équation $z' = z$.

$$z' = z \Leftrightarrow \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i = z$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)z = -4 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-4 + 2i}{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i} = \frac{-2(2-i)}{\frac{1}{2}(1-3i)} = -4 \times \frac{(2-i)(1+3i)}{1^2 + (-3)^2} = -\frac{4}{10} \times (2 + 6i - i + 3) = -2 - 2i$$

D'où Ω a pour affixe $-2 - 2i$.

La proposition 1 est alors VRAIE.

2) \blacktriangleright Si $n=1$, alors $5^{6n+1} + 2^{3n+1} = 78141$, qui n'est pas divisible par 5.

La proposition 2 est alors FAUSSE.

\blacktriangleright $5^{6n+1} = (5^6)^n \times 5$. Or $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$, alors $(5^6)^n \equiv 1^n \pmod{7}$, c'est-à-dire

$$(5^6)^n \equiv 1 \pmod{7}. \text{ Donc } 5^{6n+1} \equiv 1 \times 5 \pmod{7}.$$

$2^{3n+1} = (2^3)^n \times 2$. Or $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$, alors $(2^3)^n \equiv 1^n \pmod{7}$, c'est-à-dire

$$(2^3)^n \equiv 1 \pmod{7}. \text{ Donc } 2^{3n+1} \equiv 1 \times 2 \pmod{7}.$$

Par suite, $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 5 + 2 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}$. On en déduit que $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7, pour tout entier naturel n .

La proposition 3 est alors VRAIE.

3) Le couple $(14 ; 28)$ est un couple solution de l'équation $11x - 5y = 14$.

Alors, $11x - 5y = 14$ équivaut à $11x - 5y = 11 \times (14) - 5 \times (28)$, ou encore à

$$11(x - 14) = 5(y - 28).$$

On en déduit que 5 divise $11(x-14)$, et comme 5 et 11 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $x-14$. Il existe donc un entier k tel que $x-14=5k$, c'est-à-dire $x=14+5k$. En remplaçant x par $14+5k$ dans l'égalité $11(x-14)=5(y-28)$, on a :

$11 \times 5k = 5(y-28)$, soit $y-28=11k$, c'est-à-dire $y=28+11k$.

Réciproquement, on vérifie que tous les couples de la forme $(14+5k; 28+11k)$, où k appartient à \mathbf{Z} , sont solutions de l'équation $11x-5y=14$.

$11(14+5k)-5(28+11k)=154-140=14$. Ce qui vérifie ce que l'on souhaite.

Par conséquent, **l'ensemble de solutions de l'équation $11x-5y=14$ est l'ensemble des couples de la forme $(14+5k; 28+11k)$, où k appartient à \mathbf{Z} .**

La proposition 4 est alors VRAIE.

4) > Soit (P) le plan d'équation $x=\lambda$.

$$M(x; y; z) \in (P) \cap \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x = \lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = y^2 + \lambda^2 \\ x = \lambda \end{cases}$$

On en déduit que la section de Σ et du plan (P) d'équation $x=\lambda$ est une hyperbole d'équation $z=y^2+\lambda^2$, tracée dans le plan.

La proposition 5 est alors FAUSSE.

> Soit (\mathcal{H}) le solide délimité par Σ et par le plan d'équation $z=9$.

- Cherchons la section de (\mathcal{H}) par le plan (Q) d'équation $z=k$, avec $k \in [a; b]$.

$$M(x; y; z) \in (Q) \cap \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = k \\ z = k \end{cases}$$

Alors, la section de (\mathcal{H}) par le plan (Q) d'équation $z=k$, avec $k \in [a; b]$, est un disque de rayon \sqrt{k} , qui admet pour aire $S(k) = \pi \times (\sqrt{k})^2 = \pi k$.

- Calculons le volume de (\mathcal{H}) : $V_{(\mathcal{H})} = \int_0^9 S(k) dk = \int_0^9 \pi k dk = \left[\frac{\pi k^2}{2} \right]_0^9 = \frac{81\pi}{2}$.

- Soit (\mathcal{E}) le solide délimité par Σ et par le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Calculons le volume de (\mathcal{E}) : $V_{(\mathcal{E})} = \int_0^{\frac{9\sqrt{2}}{2}} S(k) dk = \int_0^{\frac{9\sqrt{2}}{2}} \pi k dk = \left[\frac{\pi k^2}{2} \right]_0^{\frac{9\sqrt{2}}{2}} = \frac{\left(81 \times \frac{2}{4}\right) \pi}{2} = \frac{81\pi}{4}$.

- On en déduit alors que $V_{(\mathcal{E})} = \frac{1}{2} V_{(\mathcal{H})}$; **la proposition 5 est alors VRAIE.**