CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 10	
Similitudes	***Pour le 4 mars 2008***

Antilles-Guyane, juin 2006

1) Comme $A \neq D$ et $\mathcal{I} \neq E$, alors **il existe donc une unique similitude directe s transformant A en $\mathcal{I}$ et D en E, dont le rapport est $\dfrac{\mathcal{I}E}{AD}$**.

2) Soit c la longueur du côté des deux carrés.
Dans le triangle $ED\mathcal{I}$ rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$\mathcal{I}E^2 = \mathcal{I}D^2 + DE^2 = \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 + c^2 = \dfrac{5c^2}{4}$. Comme $\mathcal{I}E > 0$, alors $\mathcal{I}E = \dfrac{c\sqrt{5}}{2}$.

Dans le triangle ABD rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$AD^2 = AB^2 + BD^2 = c^2 + (2c)^2 = 5c^2$. Comme $AD > 0$, alors $AD = c\sqrt{5}$.

On en déduit que : $\dfrac{\mathcal{I}E}{AD} = \dfrac{\frac{c\sqrt{5}}{2}}{c\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}$. Donc, **le rapport de cette similitude s est égal à $\dfrac{1}{2}$**.

On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

3) Soit B' l'image de B par s.
Comme $s(A) = \mathcal{I}$ et $s(B) = B'$, alors $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{\mathcal{I}B'}\right) =$ angle de $s = \dfrac{\pi}{2}$. D'où B' appartient à la droite perpendiculaire à (AB) passant par $\mathcal{I}$, c'est-à-dire que B' appartient à (DB).

De même, $s(D) = E$ et $s(B) = B'$, alors $\left(\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{EB'}\right) =$ angle de $s = \dfrac{\pi}{2}$. D'où B' appartient à la droite perpendiculaire à (DB) passant par E, c'est-à-dire que B' appartient à (DE).
On en déduit que B' est le point d'intersection des droites (DE) et (DB).
Par conséquent, **l'image de B par s est D**.

4) C est le milieu de $[DB]$, $s(D) = E$ et $s(B) = D$. Comme une similitude conserve les milieux, alors **l'image de C par s est le milieu de $[DE]$**.

5) a) Comme $s(A) = \mathcal{I}$, alors $\left(\overrightarrow{\Omega A}\ ;\ \overrightarrow{\Omega \mathcal{I}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. D'où, le triangle $A\Omega\mathcal{I}$ est rectangle en Ω, et par suite, **Ω appartient au cercle de diamètre $[A\mathcal{I}]$**.

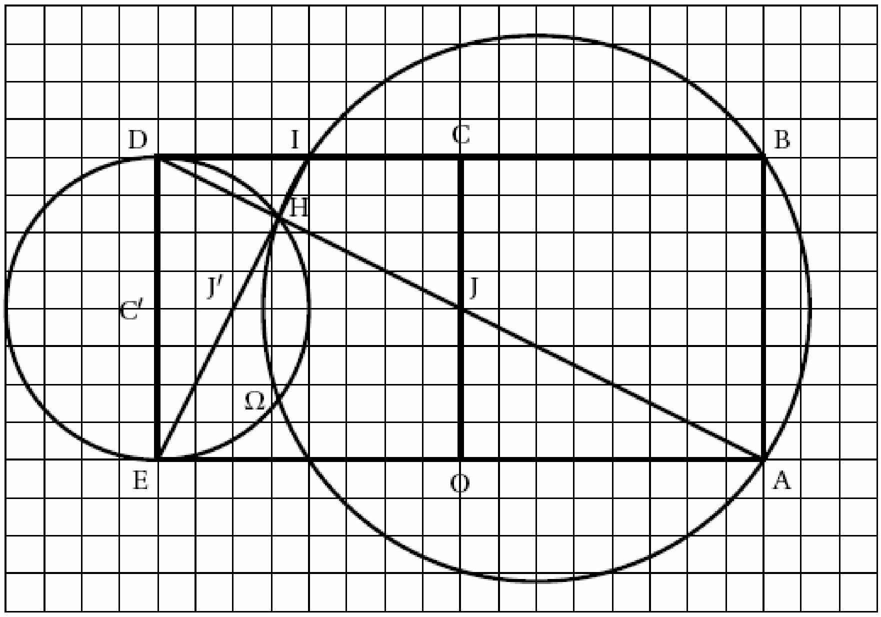
De même, $s(D) = E$, alors $\left(\overrightarrow{\Omega D}\ ;\ \overrightarrow{\Omega E}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. D'où, le triangle $D\Omega E$ est rectangle en Ω, et par suite, **Ω appartient au cercle de diamètre $[DE]$**.

b) On sait que J est le milieu de $[OC]$, alors $(OJ) = (OC)$.
Comme C est le milieu de $[BD]$ et que (OC) est parallèle à (AB), d'après le théorème de la droite des milieux, J est aussi le milieu de $[AD]$.

Son image J' par s est alors le milieu du segment image $[IE]$ et $\left(\overrightarrow{\Omega J}\ ;\ \overrightarrow{\Omega J'}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Or $\left(\overrightarrow{HJ}\ ;\ \overrightarrow{HJ'}\right)=-\frac{\pi}{2}$; par conséquent, H n'est pas le centre de la similitude s, et ainsi, **Ω ne peut être le point H.**

c)



6) a) On sait que l'écriture d'une similitude directe est de la forme $z'=az+b$ avec a et b deux nombres complexes. En prenant les points A et D, et leurs images I et E, comme $z_A=1$, $z_D=-1+i$, $z_I=-\frac{1}{2}+i$ et $z_E=-1$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a+b=-\frac{1}{2}+i \\ a(-1+i)+b=-1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a+b=-\frac{1}{2}+i \\ a(-1+i)+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-a(-1+i)=\frac{1}{2}+i \\ a+b=-\frac{1}{2}+i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(2-i)=\frac{1}{2}+i \\ a+b=-\frac{1}{2}+i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{\frac{1}{2}+i}{2-i}=\frac{1}{2}i \\ b=-\frac{1}{2}+i-\frac{1}{2}i=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \end{cases}$$

Par conséquent, **l'écriture complexe de s est $z'=\frac{i}{2}z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$** .

b) Ω est un point invariant par s, alors $z'_\Omega=z_\Omega$.

Or $z'_\Omega = z_\Omega$ équivaut à $z_\Omega = \frac{1}{2} i z_\Omega - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$, c'est-à-dire à

$$\boldsymbol{z_\Omega} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i}{1 - \frac{1}{2} i} = \frac{-1+i}{2-i} = \frac{(-1+i)(2+i)}{5} = \frac{-2-i+2i-1}{5} \boldsymbol{= -\frac{3}{5} + \frac{1}{5} i} .$$