

DEVOIR MAISON N° 11

**Similitude directe et
équation diophantienne**

Pour le 18 mars 2008

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
- 2) a) Déterminer l'affixe du point B' , image du point B par f .
b) Montrer que les droites (CB) et (CA) sont orthogonales.
- 3) Soit M le point d'affixe $z = x + iy$ où on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M' l'image de M par f .

Montrer que les vecteurs $\overline{CM'}$ et \overline{CA} sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.

- 4) On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - a) Vérifier que le couple $(-4; 2)$ est une solution de (E).
 - b) Résoudre l'équation (E).
 - c) En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5; 5]$ et tels que les vecteurs $\overline{CM'}$ et \overline{CA} soient orthogonaux.
Placer ces points sur la figure.