CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 11

Similitude directe et équation diophantienne	***Pour le 18 mars 2008***

Amérique du Nord, juin 2007

1) L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes, alors f est une similitude directe de centre Ω, d'affixe ω, de rapport k et d'angle θ. Déterminons les éléments caractéristiques de f :

- $a = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

D'où $k = |a| = 2\sqrt{2}$ et $\theta = \arg(a) = -\frac{\pi}{4}$.

- Comme Ω, d'affixe ω, est le centre de f, alors Ω est invariant par f.

D'où : $\omega = (2 - 2i)\omega + 1$, c'est-à-dire $\omega(1 - 2 + 2i) = 1$.

Alors $\omega = \frac{1}{-1+2i} = \frac{-1-2i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

Par conséquent, **f est la similitude directe de centre Ω, d'affixe $\omega = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$, de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$**.

2) a) $z_{B'} = (2 - 2i)z_B + 1 = (2 - 2i)(-4 + 2i) + 1 = -8 + 4i + 8i + 4 + 1 = -3 + 12i$.

Donc, **l'affixe du point B', image du point B par f est $-3 + 12i$**.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{CB'}$ et $\overrightarrow{CA}$ ont pour coordonnées respectives $(-4\ ;\ 8)$ et $(2\ ;\ 1)$.

D'où : $\overrightarrow{CB'}\bullet\overrightarrow{CA} = (-4)\times 2 + 8\times 1 = 0$; par suite, $\overrightarrow{CB'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.

Par conséquent, **les droites (CB') et (CA) sont orthogonales**.

3) Soit M le point d'affixe $z = x + iy$ où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
Soit M', d'affixe z', l'image de M par f. Alors,
$z' = (2 - 2i)(x + iy) + 1 = 2x + 2iy - 2ix + 2y + 1 = (2x + 2y + 1) + i(2y - 2x)$.

On en déduit que $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ ont pour affixes respectives
$z_{\overrightarrow{CM'}} = z_{M'} - z_C = (2x + 2y + 1) + i(2y - 2x) - (1 + 4i) = (2x + 2y) + i(2y - 2x - 4)$ et $z_{\overrightarrow{CA}} = 2 + i$.

D'où : $\overrightarrow{CM'}\bullet\overrightarrow{CA} = (2x + 2y)\times 2 + (2y - 2x - 4)\times 1 = 2x + 6y - 4$.

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\overrightarrow{CM'}\bullet\overrightarrow{CA} = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2x + 6y - 4 = 0$ ou encore $x + 3y - 2 = 0$.

Par conséquent, **les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $x + 3y = 2$.**

4) a) $(-4) + 3\times 2 = -4 + 6 = 2$, alors **le couple $(-4\ ;\ 2)$ est une solution de (E)**.

b) D'après la question précédente, on a : $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ (-4) + 3\times 2 = 2 \end{cases}$.

En soustrayant membre à membre ces deux équations, on obtient :
$x+3y=(-4)+3\times 2$, ou encore $1\times(x+4)=3\times(2-y)$ **(1)**.

Alors on en déduit que 3 divise $1\times(x+4)$; comme 1 et 3 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 3 divise $x+4$.
Il existe donc un entier k tel que $x+4=3k$, c'est-à-dire $x=-4+3k$.
En remplaçant x par $x=-4+3k$ dans l'équation **(1)**, on obtient : $2-y=k$, ou encore $y=2-k$.
Par conséquent, **les solutions de (E) sont les couples $\boldsymbol{(-4+3k\ ;\ 2-k)}$, où $\boldsymbol{k}$ est un entier**.

c) D'après la question précédente, les coordonnées de M pour que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux sont de la forme $(-4+3k\ ;\ 2-k)$ avec k un entier relatif.
Or les coordonnées de M doivent des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\,;5]$.

D'où $\begin{cases}-5\le -4+3k\le 5\\ -5\le 2-k\le 5\end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases}-1\le 3k\le 9\\ -7\le -k\le 3\end{cases}$, ou encore $\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\le k\le 3\\ -3\le k\le 7\end{cases}$.

Donc k peut prendre les valeurs : 0 ; 1 ; 2 et 3.
L'ensemble des points $\boldsymbol{M}$ dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $\boldsymbol{[-5\ ;\ 5]}$ et tels que les vecteurs $\boldsymbol{\overrightarrow{CM'}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{CA}}$ soient orthogonaux , est :
$\{\boldsymbol{M_0(-4\ ;\ 2), M_1(-1\ ;\ 1), M_2(2\ ;\ 0), M_3(5\ ;\ -1)}\}$.