DEVOIR MAISON N° 12	
Similitudes directe et indirecte	***Pour le 1er avril 2008***

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
L'unité graphique est 2 cm.
Le but de cet exercice est d'étudier la similitude plane indirecte f d'écriture complexe :

$$z' = i\sqrt{2}\overline{z} + 2i\sqrt{2} - 2,$$

et d'en donner deux décompositions.

1. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 1$.
Déterminer en fonction de a et de b l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

2. Première décomposition de *f*

Soit g la similitude plane directe d'écriture complexe : $z' = i\sqrt{2}z + 2i\sqrt{2} - 2$.

1) Préciser les éléments caractéristiques de g. (centre, rapport, angle).
2) Déterminer une réflexion s telle que $f = g \circ s$.

3. Deuxième décomposition de *f*

1) Montrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.
2) Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x + 2$.

Montrer que pour tout point N appartenant à $\mathscr{D}$, le point $f(N)$ appartient aussi à $\mathscr{D}$.

3) Soit σ la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.
   a) Donner l'écriture complexe de σ.
   Indication : on pourra poser $z' = a\overline{z} + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b.
   b) En déduire que l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$.
   c) Donner la nature de la transformation k et préciser ses éléments caractéristiques.
4) Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composée d'une réflexion et d'une homothétie.