

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 12

Similitudes directe et indirecte

Pour le 1^{er} avril 2008

Centres Étrangers, juin 2007

1. Restitution organisée de connaissances

L'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 1$.

Le point invariant Ω , d'affixe w , vérifie alors l'égalité $w = aw + b$, c'est-à-dire $(1-a)w = b$.

Comme $a \neq 1$, alors $w = \frac{b}{1-a}$.

Par conséquent, l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe est $\frac{b}{1-a}$.

2. Première décomposition de f

1) D'après la question 1., l'affixe du centre de g est égale à $\frac{2i\sqrt{2}-2}{1-i\sqrt{2}} = -2$.

Le rapport de g est égal à $|i\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

L'angle de g est un argument de $i\sqrt{2}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, g est une similitude plane directe de centre d'affixe -2 , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) $M(z) \xrightarrow{s} M_1(z_1) \xrightarrow{g} M'(z')$ tels que $z' = i\sqrt{2}z_1 + 2i\sqrt{2} - 2$ et $z' = i\sqrt{2}\bar{z} + 2i\sqrt{2} - 2$.

D'où $z_1 = \bar{z}$; on en déduit alors que M_1 est l'image de M par la réflexion s d'axe $(O; \bar{u})$.

Donc $f = g \circ s$ avec s la réflexion d'axe $(O; \bar{u})$.

3. Deuxième décomposition de f

1) Soit Ω un point invariant par f et w son affixe. Soit $w = x + iy$.

Alors $w = i\sqrt{2}\bar{w} + 2i\sqrt{2} - 2$ équivaut à $x + iy = i\sqrt{2}(x - iy) + 2i\sqrt{2} - 2 = (-2 + y\sqrt{2}) + i(2\sqrt{2} + x\sqrt{2})$

$$\begin{aligned} x + iy = i\sqrt{2}(x - iy) + 2i\sqrt{2} - 2 = (-2 + y\sqrt{2}) + i(2\sqrt{2} + x\sqrt{2}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + y\sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} + x\sqrt{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + y\sqrt{2} \\ (-2 + y\sqrt{2})\sqrt{2} - y = -2\sqrt{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + y\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} + 2y - y = -2\sqrt{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, f admet un unique point invariant Ω , d'affixe -2 .

2) Soit \mathcal{D} la droite d'équation $y = x + 2$. Comme N appartient à \mathcal{D} , alors l'affixe de N peut s'écrire sous la forme $z_N = x + i(x + 2)$, avec x un réel.

$$\text{Alors } z_{N'} = i\sqrt{2}(x - i(x + 2)) + 2i\sqrt{2} - 2 = (x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2) + i(x\sqrt{2} + 2\sqrt{2}).$$

Or $y_{N'} = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2) + 2 = x_{N'} + 2$; d'où point $f(N)$ appartient aussi à \mathcal{D} .

Donc, **pour tout point N appartenant à \mathcal{D} , le point $f(N)$ appartient aussi à \mathcal{D} .**

3) a) Soit σ la réflexion d'axe \mathcal{D} .

Les points A et Ω d'affixes respectives $2i$ et -2 appartiennent à \mathcal{D} , et sont donc invariants par σ .

Comme l'écriture complexe de σ est de la forme $z' = a\bar{z} + b$, alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} z_A = a\bar{z}_A + b \\ z_\Omega = a\bar{z}_\Omega + b \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} 2i = -2ai + b & [1] \\ -2 = -2a + b & [2] \end{cases}, \text{ c'est-à-dire à } \begin{cases} 2i + 2 = 2a(1 - i) & [1] - [2] \\ -2 = -2a + b & [2] \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} z_A = a\bar{z}_A + b \\ z_\Omega = a\bar{z}_\Omega + b \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a = \frac{z(1+i)}{z(1-i)} = \frac{(1+i)^2}{2} = i \\ b = -2 + 2a = -2 + 2i \end{cases}.$$

Par conséquent, **l'écriture complexe de σ est $z' = i\bar{z} - 2 + 2i$.**

b) $M(z) \xrightarrow{\sigma} M_1(z_1) \xrightarrow{k} M'(z')$ tels que $z' = i\sqrt{2}\bar{z}_1 + 2i\sqrt{2} - 2$ et $z_1 = i\bar{z} - 2 + 2i$.

D'où :

$$z' = i\sqrt{2}(\overline{i\bar{z} - 2 + 2i}) + 2i\sqrt{2} - 2 = i\sqrt{2}(-i\bar{z} - 2 - 2i) + 2i\sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}\bar{z} - 2i\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 2.$$

Par conséquent, **l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}\bar{z} + 2\sqrt{2} - 2$.**

c) L'écriture complexe de k est de la forme $z' = az + b$, avec a un nombre réel et b un nombre complexe, alors k est une homothétie de centre Ω' , d'affixe ω' , et de rapport a .

$$\text{Cherchons } \omega' ; \text{ d'après la question 1.}, \omega' = \frac{2\sqrt{2} - 2}{1 - \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{1 - \sqrt{2}} = -2.$$

Donc, **k est une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et de centre Ω .**

4) Comme $k = f \circ \sigma$, alors $k \circ \sigma^{-1} = f \circ \sigma \circ \sigma^{-1}$. Or $\sigma \circ \sigma^{-1} = id$ et $\sigma^{-1} = \sigma$.

Donc, **$f = k \circ \sigma$.**