

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 13

Similitude

Pour le 8 avril 2008

1) Le format du rectangle $OABC$ est égal à $\frac{OA}{OC} = \frac{|z_A - z_O|}{|z_C - z_O|} = \frac{|\sqrt{2} - 0|}{|i - 0|} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$.

Le format du rectangle $JIAB$ est égal à $\frac{AB}{IA} = \frac{OC}{OI} = \frac{1}{\frac{OA}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

On en déduit que **les rectangles $OABC$ et $JIAB$ ont le même format égal à $\sqrt{2}$** .

2) Soit s la similitude directe d'écriture complexe : $z' = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$.

a) Comme l'écriture complexe de s est de la forme $z' = az + b$, avec a et b deux nombres complexes ($a \neq 1$), alors s est une similitude directe plane.

Le rapport de s est $\left| -i\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'angle de s est un argument de $-i\frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2}$.

Le centre de s est un point invariant par s .

Résolvons l'équation $z' = z$:

$$z' = z \Leftrightarrow z = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$$

$$\Leftrightarrow z + i\frac{\sqrt{2}}{2}z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i}{1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\right)\left(1 - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i + i + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2} + i}{3}$$

Donc le centre s est le point Ω d'affixe $\frac{2\sqrt{2} + i}{3}$.

Par conséquent, **s est une similitude directe plane de centre Ω , d'affixe $\frac{2\sqrt{2} + i}{3}$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.**

b) • $z'_O = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z_O + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \frac{\sqrt{2}}{2} + i = z_J$; d'où l'image de O par s est J .

• $z'_A = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z_A + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = -i + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \frac{\sqrt{2}}{2} = z_I$; d'où l'image de A par s est I .

- $z'_B = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z_B + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = -i\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} + i) + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \sqrt{2} = z_A$; d'où l'image de **B** par **s** est **A**.

- $z'_C = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z_C + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = -i\frac{\sqrt{2}}{2} \times i + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \sqrt{2} + i = z_B$; d'où l'image de **C** par **s** est **B**.

3) a) Soit M un point du plan et M' son image par s .

D'après les propriétés d'une similitude, on peut dire que $(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) = -\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que le triangle $M\Omega M'$ est rectangle en Ω , pour tout point M du plan.

Par conséquent, **le point Ω appartient au cercle de diamètre $[MM']$ pour tout point M du plan, ayant pour image M' par s .**

D'après la question 2) b), $s(O) = J$, alors Ω appartient au cercle de diamètre $[OJ]$; $s(A) = I$, alors Ω au cercle de diamètre $[AI]$; $s(B) = A$, alors Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et $s(C) = B$, alors Ω appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

On en déduit que **les cercles de diamètre $[OJ]$, $[BC]$, $[AB]$ et $[AI]$ sont concourants en Ω .**

b) Soit $h = s \circ s$.

➤ • 1^{ère} méthode : la composée d'une similitude plane directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ , et d'une similitude plane directe de centre Ω , de rapport k' et d'angle θ' , est une similitude plane directe de centre Ω , de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.

D'où **h est une similitude directe de centre Ω , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ et d'angle**

$$\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi, \text{ c'est-à-dire que } h \text{ est l'homothétie de centre } \Omega \text{ et de rapport } -\frac{1}{2}.$$

- 2^{nde} méthode : $M(z) \xrightarrow{s} M_1(z_1) \xrightarrow{s} M'(z')$ tels que $z' = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$ et

$$z_1 = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i.$$

$$\text{D'où : } z' = -i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = -\frac{1}{2}z + \sqrt{2} + \frac{1}{2}i.$$

Alors, l'écriture complexe de h est : $z' = -\frac{1}{2}z + \sqrt{2} + \frac{1}{2}i$.

Comme l'écriture complexe de h est de la forme $z' = az + b$, avec a un réel et b un nombre complexe ($a \neq 1$), alors h est une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$.

Le centre de h est le point invariant par h . Résolvons l'équation $z' = z$:

$$z' = z \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}z + \sqrt{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}z = \sqrt{2} + \frac{1}{2}i \quad . \text{ Donc le centre } h \text{ est le point } \Omega.$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i = z_\Omega$$

Par conséquent, **h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.**

➤ Le centre d'une homothétie h , un point M et son image M' par h sont alignés.

Or $h(B) = (s \circ s)(B) = s(A) = I$, alors Ω , B et I sont alignés.

De même, $h(C) = (s \circ s)(C) = s(B) = A$, alors Ω , A et C sont alignés.