DEVOIR MAISON N° 14

Similitudes et arithmétique	*Pour le 6 mai 2008*

Exercice 1

Dans le plan, on considère deux segments $[AC]$ et $[BD]$ tels que $AC = BD$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

On désigne par M le milieu de $[AC]$ et par N celui de $[BD]$. On appelle (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) les cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

On construira la figure au fur et à mesure des besoins.

1) a) Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ?
Montrer que le centre $\mathcal{I}$ de r appartient aux cercles (C_1) et (C_3).
b) Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r' ?
Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles (C_2) et (C_4).
c) Quelle est la nature du quadrilatère $\mathcal{I}NJM$? On désigne par P et R les points diamétralement opposés à $\mathcal{I}$ sur, respectivement, (C_1) et (C_3) et par Q et S les points diamétralement opposés à J sur, respectivement, (C_2) et (C_4).

2) Soit s la similitude directe de centre $\mathcal{I}$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
a) Quelles sont les images par s des points D, N, B ?
b) En déduire que J est le milieu de $[PR]$.

Exercice 2

On note 0, 1, 2, . . ., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12.

Par exemple : $\overline{\beta\alpha7}^{12} = \beta\times12^2 + \alpha\times12 + 7 = 11\times12^2 + 10\times12 + 7 = 1711$ en base 10.

1) a) Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$.
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.
b) Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131 = 1\times10^3 + 1\times10^2 + 3\times10 + 1$.
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 : $N = \overline{a_n...a_1a_0}^{12}$.

2) a) Démontrer que $N \equiv a_0 \quad (3)$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3.
Confirmer avec son écriture en base 10.

3) a) Démontrer que $N = a_n + ... + a_1 + a_0 \quad (11)$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.
b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11.
Confirmer avec son écriture en base 10.

4) Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.