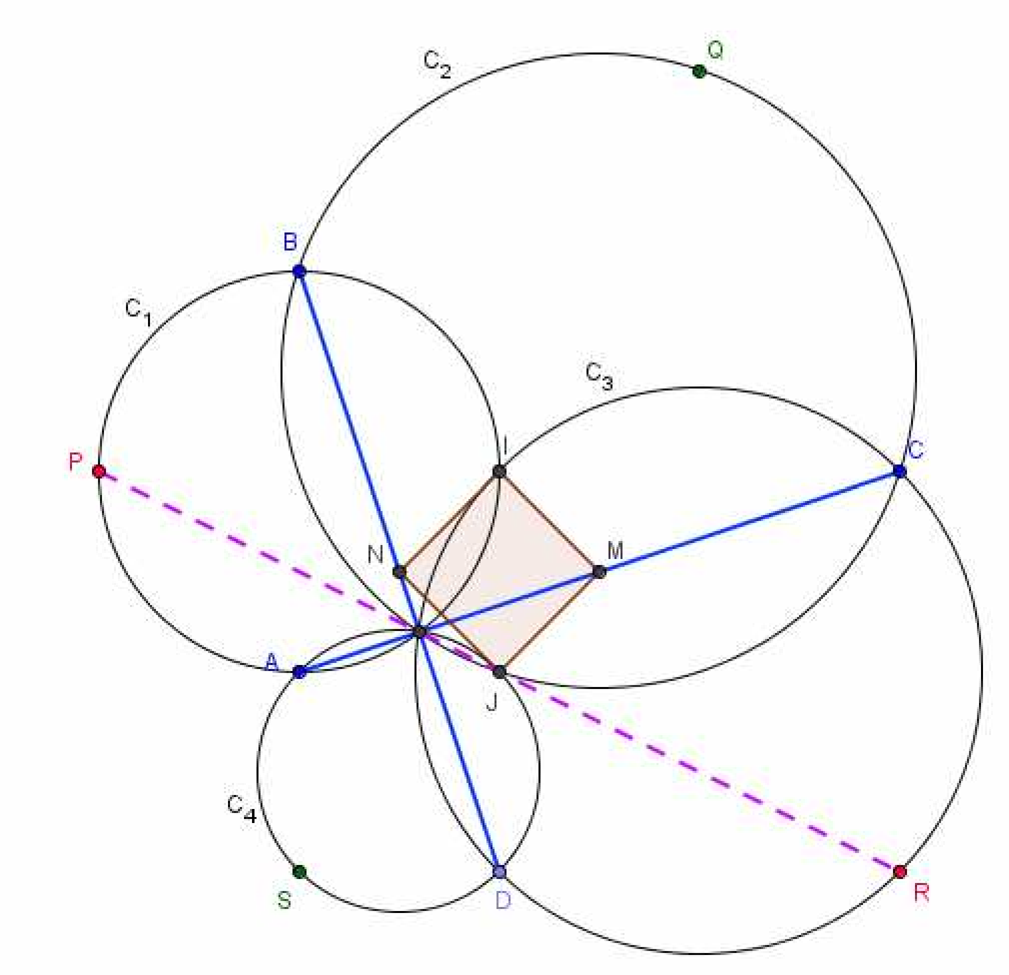
CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 14

Similitudes et arithmétique	**Pour le 6 mai 2008**

Exercice 1 (*Antilles, septembre 2002*)



1) a) L'angle de la rotation r est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{r(A)r(C)}\right)$, c'est-à-dire de $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right)$. Par conséquent, **l'angle de r est $-\frac{\pi}{2}$**.

Soit I le centre de r ; comme r transforme A en B et C en D, alors $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) = -\frac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}\right) = -\frac{\pi}{2}$. On en déduit que les triangles IAB et ICD sont rectangles en I.
Par suite, **le point I appartient au cercle de diamètre $[AB]$, c'est-à-dire (C_1), et au cercle de diamètre $[CD]$, c'est-à-dire (C_3)**.

b) L'angle de la rotation r' est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{r'(A)r'(C)}\right)$, c'est-à-dire de $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right)$. Or $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right) = -\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{2}$ Par conséquent, **l'angle de r' est $\frac{\pi}{2}$**.

Soit J le centre de r' ; comme r' transforme A en D et C en B, alors $\left(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JD}\right)=\frac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JB}\right)=\frac{\pi}{2}$. On en déduit que les triangles JAD et JCB sont rectangles en J.

Par suite, **le point J appartient au cercle de diamètre $[AD]$, c'est-à-dire (C_4), et au cercle de diamètre $[CB]$, c'est-à-dire (C_2)**.

c) Comme r transforme A en B et C en D, que M et N sont les milieux respectifs de $[AC]$ et de $[BD]$, et qu'une rotation conserve les milieux, alors l'image de M par r est N.

On en déduit que $IM = IN$ et $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

De même, r' transforme A en D et C en B, M et N sont les milieux respectifs de $[AC]$ et de $[BD]$, et qu'une rotation conserve les milieux, alors l'image de M par r' est N.

On en déduit que $JM = JN$ et $\left(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JN}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Or un quadrilatère ayant deux angles droits opposés et deux côtés consécutifs de même longueur est un carré ; par conséquent, **$INJM$ est un carré**.

On désigne par P et R les points diamétralement opposés à I sur, respectivement, (C_1) et (C_3) et par Q et S les points diamétralement opposés à J sur, respectivement, (C_2) et (C_4).

2) a) Soit s la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

• soit D' l'image de D par s. Alors $ID' = \sqrt{2}\ ID$ et $\left(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{ID'}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Comme R est le point diamétralement opposé à I sur (C_3), alors le triangle IDR est rectangle et isocèle en D. D'où $IR = \sqrt{2}\ ID$ et $\left(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IR}\right)=\frac{\pi}{4}$. On en déduit que $\boldsymbol{s(D)=R}$.

• soit N' l'image de N par s. Alors $IN' = \sqrt{2}\ IN$ et $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IN'}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Comme $INJM$ est un carré, alors $IJ = \sqrt{2}\ IN$ et $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IJ}\right)=\frac{\pi}{4}$. On en déduit que $\boldsymbol{s(N)=J}$.

• soit B' l'image de B par s. Alors $IB' = \sqrt{2}\ IB$ et $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Comme P est le point diamétralement opposé à I sur (C_1), alors le triangle IBP est rectangle et isocèle en B. D'où $IP = \sqrt{2}\ IB$ et $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IP}\right)=\frac{\pi}{4}$. On en déduit que $\boldsymbol{s(B)=P}$.

b) Comme N est le milieu de $[BD]$, que les images de D, N, B par s sont respectivement R, J, P, et qu'une similitude conserve les milieux, alors **J est le milieu de $[PR]$**.

<u>Exercice 2</u> (*Nouvelle-Calédonie, mars 2008*)

1) a) Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$. Alors $\boldsymbol{N_1} = 12^2 \times 11 + 12 \times 1 + 10 = \mathbf{1606}$.

b) Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131 = 1\times10^3 + 1\times10^2 + 3\times10 + 1$.
$1131 = 12\times94+3$. Or $94 = 12\times7+10 = 12\times7+\alpha$; d'où :

$1131 = 12\times(12\times 7+\alpha)+3 = 12^2\times 7 + 12\times\alpha + 3$. Donc $\boldsymbol{N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12}}$.

2) a) $N = \overline{a_n ... a_1 a_0}^{12} = 12^{n-1}\times a_n + ... + 12\times a_1 + a_0$. Or pour tout entier n non nul, $12^n \equiv 0 \quad (3)$.
D'après les propriétés des congruences, $\boldsymbol{N \equiv a_0 \quad (3)}$.

Un nombre N, écrit en base 12, est divisible par 3 si, et seulement si, $N \equiv 0 \quad (3)$, c'est-à-dire si, et seulement si, a_0 est un multiple de 3.
Par conséquent, **un nombre écrit en base 12 est divisible par 3 si le dernier chiffre est un multiple de 3**.

b) D'après la question 1) b), le dernier chiffre de l'écriture de N_2 en base 12 est 3.
Alors $\boldsymbol{N_2}$ **est divisible par 3**.
En base 10, N_2 s'écrit 1131 ; or $1+1+3+1=6$ est divisible par 3. Cela confirme bien le résultat précédent.

3) a) On sait que $12 \equiv 1 \quad (11)$, alors pour tout entier naturel n non nul, $12^n \equiv 1^n \quad (11) \equiv 1 \quad (11)$.
Par conséquent, $\boldsymbol{N \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \quad (11)}$.

On en déduit qu'**un nombre écrit en base 12 est divisible par 11 si la somme des chiffres, qui composent l'écriture, est un multiple de 11**.

b) La somme des chiffres de N_1 en base 12 est $\beta + 1 + \alpha = 11+1+10 = 22$, et 22 est un multiple de 11. Donc $\boldsymbol{N_1}$ **est divisible par 11**.
En base 10, N_1 s'écrit 1606 ; or $1606 = 11\times 146$. Cela confirme bien le résultat précédent.

4) Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. N est divisible par 33 si N est divisible par 3, c'est-à-dire que y est un multiple de 3, et si N est divisible par 11, c'est-à-dire que $x+4+y$ est un multiple de 11.

On est alors amené à résoudre le système $\begin{cases} y = 3k \\ x+4+y = 11k' \end{cases}$, avec k et k' des entiers naturels.

Or $\begin{cases} y = 3k \\ x+4+3k = 11k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3k \\ x = 11k' - 3k - 4 \end{cases}$.

Comme y est un entier compris entre 0 et 9, alors les valeurs possibles de k sont : 0 ; 1 ; 2 et 3.
Étudions les différents cas :

- si $k=0$, alors $y=0$ et $x = 11k'-4$. Comme x est un entier compris entre 0 et 9, alors $k'=1$ et $x=7$. Dans ce cas, $\boldsymbol{N = \overline{740}^{12} = 1056}$ **est divisible par 33**.
- si $k=1$, alors $y=3$ et $x=11k'-7$. Comme x est un entier compris entre 0 et 9, alors $k'=1$ et $x=4$. Dans ce cas, $\boldsymbol{N = \overline{443}^{12} = 627}$ **est divisible par 33**.
- si $k=2$, alors $y=6$ et $x=11k'-10$. Comme x est un entier compris entre 0 et 9, alors $k'=1$ et $x=1$. Dans ce cas, $\boldsymbol{N = \overline{146}^{12} = 198}$ **est divisible par 33**.
- si $k=3$, alors $y=9$ et $x=11k'-13$. Comme x est un entier compris entre 0 et 9, alors $k'=2$ et $x=9$. Dans ce cas, $\boldsymbol{N = \overline{949}^{12} = 1353}$ **est divisible par 33**.