

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 1

Divisibilité et division euclidienne

Pour le 25 septembre 2007

Exercice 1

L'ensemble des diviseurs propres de 220 est : $\{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 44 ; 55 ; 110\}$.
Et : $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$.

L'ensemble des diviseurs propres de 284 est : $\{1 ; 2 ; 4 ; 71 ; 142\}$.
Et : $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

On en déduit donc que les entiers naturels 220 et 284 sont amicaux.

Exercice 2

Pour démontrer que a est un multiple de 3, il suffit de prouver que a s'écrit $a = 3k$ avec k un entier naturel.

Or tout entier naturel n s'écrit sous la forme $3p$ ou $3p+1$ ou $3p+2$ (avec p un entier).

Faisons une démonstration par disjonction des cas.

❶ Si $n = 3p$, alors $a = n(n^2 + 5) = 3p(9p^2 + 5) = 3k$ avec $k = p(9p^2 + 5)$. Comme k est un entier, alors a est un multiple de 3.

❷ Si $n = 3p+1$, alors

$$a = n(n^2 + 5) = (3p+1)(9p^2 + 6p + 6) = 3(3p+1)(3p^2 + 2p + 2) = 3k \text{ avec } k = (3p+1)(3p^2 + 2p + 2)$$

Comme k est un entier, alors a est un multiple de 3.

❸ Si $n = 3p+2$, alors

$$a = n(n^2 + 5) = (3p+2)(9p^2 + 12p + 9) = 3(3p+2)(3p^2 + 4p + 3) = 3k \text{ avec } k = (3p+2)(3p^2 + 4p + 3)$$

Comme k est un entier, alors a est un multiple de 3.

Par conséquent, **pour tout entier naturel n , $a = n(n^2 + 5)$ est un multiple de 3.**

Exercice 2

D'après les hypothèses, $m = 17q + 8$ et $n = 17q' + 12$ où q et q' sont des entiers.

❶ On en déduit que : $m + n = 17(q + q') + 20 = 17(q + q' + 1) + 3$.

Comme q et q' sont des entiers, alors $q + q' + 1$ est également un entier.

De plus, $0 \leq 3 < 17$.

Par conséquent, **le reste de la division euclidienne par 17 de $m + n$ est 3.**

❷ De même :

$$mn = (17q + 8)(17q' + 12) = 17(17qq' + 12q + 8q') + 96 = 17(17qq' + 12q + 8q' + 5) + 11.$$

Comme q et q' sont des entiers, alors $17qq' + 12q + 8q' + 5$ est également un entier.

De plus, $0 \leq 11 < 17$.

Par conséquent, **le reste de la division euclidienne par 17 de mn est 11.**

❸ Alors : $m^2 = (17q + 8)^2 = 17(17q^2 + 16q) + 64 = 17(17q^2 + 16q + 3) + 13$

Comme q sont des entiers, alors $17q^2 + 16q + 3$ est également un entier.

De plus, $0 \leq 13 < 17$.

Par conséquent, **le reste de la division euclidienne par 17 de m^2 est 13.**