

DEVOIR MAISON N° 2

Congruences

Pour le 16 octobre 2007

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2) Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3) Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

b) Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.

c) Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

4) On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :

$$a = \overline{1001001000} \quad \text{et} \quad b = \overline{1000100010000}.$$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p .

Sont-ils divisibles par 7 ?

.....

DEVOIR MAISON N° 2

Congruences

Pour le 16 octobre 2007

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2) Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3) Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

b) Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.

c) Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

4) On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :

$$a = \overline{1001001000} \quad \text{et} \quad b = \overline{1000100010000}.$$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p .

Sont-ils divisibles par 7 ?

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 2

Congruences

Pour le 16 octobre 2007

Exercice donné en juin 1999 en Polynésie

1) a) • *Première méthode : en utilisant les congruences*

Sachant que $8 = 1 \times 7 + 1$; alors $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$. D'où $(2^3)^n \equiv 1^n \pmod{7}$, c'est-à-dire $2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$.

Donc, $2^{3n} - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{7}$, ou encore $2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

Par conséquent, $2^{3n} - 1$ est un multiple 7.

• *Première méthode : en utilisant une démonstration par récurrence*

Soit \mathcal{P} la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$\mathcal{P}(n)$: « $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 »

→ Comme $2^0 - 1 = 0$ et que 0 est un multiple de 7, alors on a $\mathcal{P}(0)$ qui est vraie.

→ Montrons que pour tout $n \geq 1$, on a : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 **(1)**.

Alors il existe un entier k tel que $2^{3n} - 1 = 7k$, c'est-à-dire $2^{3n} = 1 + 7k$.

D'où $2^{3(n+1)} = 2^{3n+3} = 2^{3n} \times 8 = (1 + 7k) \times 8$.

Alors $2^{3(n+1)} - 1 = (1 + 7k) \times 8 - 1 = 7 + 56k = 7 \times (1 + 8k)$.

Comme $1 + 8k$ est un entier (en tant que combinaison linéaire de deux entiers), alors

$2^{3(n+1)} - 1$ est un multiple de 7.

On en déduit que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

On a alors prouvé :

$\mathcal{P}(0)$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$.

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n entier naturel, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout entier naturel, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.**

b) D'après ce qui précède, $2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$. Alors $2^{3n+1} \equiv 1 \times 2^1 \pmod{7}$, et donc,

$2^{3n+1} - 2 \equiv 2 - 2 \pmod{7}$.

Par conséquent, $2^{3n+1} - 2 \equiv 0 \pmod{7}$, et alors $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7.

c) D'après ce qui précède, $2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$. Alors $2^{3n+2} \equiv 1 \times 2^2 \pmod{7}$, et donc,

$2^{3n+2} - 4 \equiv 4 - 4 \pmod{7}$.

Par conséquent, $2^{3n+2} - 4 \equiv 0 \pmod{7}$, et alors $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2) D'après la question précédente, $2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$; par conséquent, **le reste de la division de 2^{3n} par 7 est 1.**

De même, $2^{3n+1} - 2 \equiv 0 \pmod{7}$, c'est-à-dire $2^{3n+1} \equiv 2 \pmod{7}$; par conséquent, **le reste de la division de 2^{3n+1} par 7 est 2.**

Comme $2^{3n+2} - 4 \equiv 0 \pmod{7}$, c'est-à-dire $2^{3n+2} \equiv 4 \pmod{7}$; par conséquent, **le reste de la division de 2^{3n+2} par 7 est 4.**

3) a) Si $p = 3n$, alors $A_p = 2^{3n} + 2^{6n} + 2^{9n} = 2^{3n} + (2^{3n})^2 + (2^{3n})^3$.

D'après la question 2), $2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$ alors $(2^{3n})^2 \equiv 1^2 \pmod{7}$ et $(2^{3n})^3 \equiv 1^3 \pmod{7}$.

Donc, $A_p \equiv 3 \pmod{7}$. Par conséquent, **si $p = 3n$, le reste de la division de A_p par 7 est 3.**

b) Si $p = 3n + 1$, alors $A_p = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3} = 2^{3n+1} + (2^{3n+1})^2 + (2^{3n+1})^3$.

D'après la question 2), $2^{3n+1} \equiv 2 \pmod{7}$ alors $(2^{3n+1})^2 \equiv 2^2 \pmod{7}$ et $(2^{3n+1})^3 \equiv 2^3 \pmod{7}$.

Donc, $A_p \equiv 2 + 4 + 8 \pmod{7}$, c'est-à-dire $A_p \equiv 0 \pmod{7}$.

Par conséquent, **si $p = 3n + 1$, A_p est divisible par 7.**

c) Si $p = 3n + 1$, alors $A_p = 2^{3n+2} + 2^{6n+4} + 2^{9n+6} = 2^{3n+2} + (2^{3n+2})^2 + (2^{3n+2})^3$.

D'après la question 2), $2^{3n+2} \equiv 4 \pmod{7}$ alors $(2^{3n+2})^2 \equiv 4^2 \pmod{7}$ et $(2^{3n+2})^3 \equiv 4^3 \pmod{7}$.

Donc, $A_p \equiv 4 + 16 + 64 \pmod{7}$, c'est-à-dire $A_p \equiv 0 \pmod{7}$ car 84 est divisible par 7.

Par conséquent, **si $p = 3n + 2$, A_p est divisible par 7.**

4) $\mathbf{a} = \overline{1001001000} = 2^3 + 2^6 + 2^9 = \mathbf{A}_3$ et $\mathbf{b} = \overline{1000100010000} = 2^4 + 2^8 + 2^{12} = \mathbf{A}_4$.

Comme $3 = 3 \times 1$, d'après la question 3) a), le reste de la division de A_3 par 7 est 3.
Donc **a n'est pas divisible par 7.**

Comme $4 = 3 \times 1 + 1$, d'après la question 3) b), A_4 est divisible par 7.
Donc **b est divisible par 7.**