

## CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 2

**Congruences**

**Pour le 16 octobre 2007**

### *Exercice donné en juin 1999 en Polynésie*

1) a) • **Première méthode : en utilisant les congruences**

Sachant que  $8 = 1 \times 7 + 1$  ; alors  $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ . D'où  $(2^3)^n \equiv 1^n \pmod{7}$ , c'est-à-dire  $2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$ .

Donc,  $2^{3n} - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{7}$ , ou encore  $2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ .

Par conséquent,  **$2^{3n} - 1$  est un multiple de 7.**

• **Deuxième méthode : en utilisant une démonstration par récurrence**

Soit  $\mathcal{P}$  la propriété définie pour  $n$  de  $\mathbf{N}$  par :

$$\mathcal{P}(n) : \ll 2^{3n} - 1 \text{ est un multiple de } 7 \gg$$

→ Comme  $2^0 - 1 = 0$  et que 0 est un multiple de 7, alors on a  $\mathcal{P}(0)$  qui est vraie.

→ Montrons que pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ .

Soit  $n \geq 1$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Alors :  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7 **(1)**.

Alors il existe un entier  $k$  tel que  $2^{3n} - 1 = 7k$ , c'est-à-dire  $2^{3n} = 7k + 1$ .

$$\text{D'où } 2^{3(n+1)} = 2^{3n+3} = 2^{3n} \times 8 = (7k + 1) \times 8.$$

$$\text{Alors } 2^{3(n+1)} - 1 = (7k + 1) \times 8 - 1 = 7k + 7 = 7(k + 1).$$

Comme  $k + 1$  est un entier (en tant que combinaison linéaire de deux entiers), alors

$$2^{3(n+1)} - 1 \text{ est un multiple de } 7.$$

On en déduit que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

On a alors prouvé :

$$\mathcal{P}(0) \text{ et pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } 1, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1).$$

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\text{pour tout } n \text{ entier naturel, } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}$$

C'est-à-dire : **pour tout entier naturel,  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7.**

b) D'après ce qui précède,  $2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$ . Alors  $2^{3n+1} \equiv 1 \times 2^1 \pmod{7}$ , et donc,  $2^{3n+1} - 2 \equiv 2 - 2 \pmod{7}$ .

Par conséquent,  $2^{3n+1} - 2 \equiv 0 \pmod{7}$ , et alors  **$2^{3n+1} - 2$  est un multiple de 7.**

c) D'après ce qui précède,  $2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$ . Alors  $2^{3n+2} \equiv 1 \times 2^2 \pmod{7}$ , et donc,  $2^{3n+2} - 4 \equiv 4 - 4 \pmod{7}$ .

Par conséquent,  $2^{3n+2} - 4 \equiv 0 \pmod{7}$ , et alors  **$2^{3n+2} - 4$  est un multiple de 7.**

2) D'après la question précédente,  $2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$  ; par conséquent, **le reste de la division de  $2^{3n}$  par 7 est 1.**

De même,  $2^{3n+1} - 2 \equiv 0 \pmod{7}$ , c'est-à-dire  $2^{3n+1} \equiv 2 \pmod{7}$  ; par conséquent, **le reste de la division de  $2^{3n+1}$  par 7 est 2.**

Comme  $2^{3n+2} - 4 \equiv 0 \pmod{7}$ , c'est-à-dire  $2^{3n+2} \equiv 4 \pmod{7}$  ; par conséquent, **le reste de la division de  $2^{3n+2}$  par 7 est 4.**

3) a) Si  $p = 3n$ , alors  $A_p = 2^{3n} + 2^{6n} + 2^{9n} = 2^{3n} + (2^{3n})^2 + (2^{3n})^3$ .

D'après la question 2),  $2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$  alors  $(2^{3n})^2 \equiv 1^2 \pmod{7}$  et  $(2^{3n})^3 \equiv 1^3 \pmod{7}$ .

Donc,  $A_p \equiv 3 \pmod{7}$ . Par conséquent, **si  $p = 3n$ , le reste de la division de  $A_p$  par 7 est 3.**

b) Si  $p = 3n+1$ , alors  $A_p = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3} = 2^{3n+1} + (2^{3n+1})^2 + (2^{3n+1})^3$ .

D'après la question 2),  $2^{3n+1} \equiv 2 \pmod{7}$  alors  $(2^{3n+1})^2 \equiv 2^2 \pmod{7}$  et  $(2^{3n+1})^3 \equiv 2^3 \pmod{7}$ .

Donc,  $A_p \equiv 2 + 4 + 8 \pmod{7}$ , c'est-à-dire  $A_p \equiv 0 \pmod{7}$ .

Par conséquent, **si  $p = 3n + 1$ ,  $A_p$  est divisible par 7.**

c) Si  $p = 3n+2$ , alors  $A_p = 2^{3n+2} + 2^{6n+4} + 2^{9n+6} = 2^{3n+2} + (2^{3n+2})^2 + (2^{3n+2})^3$ .

D'après la question 2),  $2^{3n+2} \equiv 4 \pmod{7}$  alors  $(2^{3n+2})^2 \equiv 4^2 \pmod{7}$  et  $(2^{3n+2})^3 \equiv 4^3 \pmod{7}$ .

Donc,  $A_p \equiv 4 + 16 + 64 \pmod{7}$ , c'est-à-dire  $A_p \equiv 0 \pmod{7}$  car 84 est divisible par 7.

Par conséquent, **si  $p = 3n + 2$ ,  $A_p$  est divisible par 7.**

4)  $\mathbf{a} = \overline{1001001000} = 2^3 + 2^6 + 2^9 = \mathbf{A}_3$  et  $\mathbf{b} = \overline{1000100010000} = 2^4 + 2^8 + 2^{12} = \mathbf{A}_4$ .

Comme  $3 = 3 \times 1$ , d'après la question 3) a), le reste de la division de  $A_3$  par 7 est 3.  
Donc  **$\mathbf{a}$  n'est pas divisible par 7.**

Comme  $4 = 3 \times 1 + 1$ , d'après la question 3) b),  $A_4$  est divisible par 7.  
Donc  **$\mathbf{b}$  est divisible par 7.**