

DEVOIR MAISON N° 3

Congruences et nombres premiers

Pour le 6 novembre 2007

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

- 1) Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
- 2) Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q .
- 3) Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a ; b)$ vérifiant la relation (E) : $a^2 - 250\,507 = b^2$.

- 1) Soit X un entier naturel.
 - a) Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
 - b) Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2 .
 - c) Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
- 2) Justifier que si le couple $(a ; b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$.

Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501 ; b)$.

- 3) On suppose que le couple $(a ; b)$ vérifie la relation (E).
 - a) Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
 - b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k ; b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

- 1) Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
- 2) Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ? (Utiliser l'algorithme d'Euclide vu en 3^{ème}.)
- 3) Cette écriture est-elle unique ?