

DEVOIR MAISON N° 5

Arithmétique

Pour le 4 décembre 2007

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

- 1) Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
- 2) En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$, puis que n est divisible par 16.
- 3) En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n .
- 4) a) Soient a , b et c trois entiers naturels. Démontrer que si a divise c et b divise c , avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c .
b) Déduire de ce qui précède que 240 divise n .
- 5) Existe-t-il quinze nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_{15} supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?