

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 5

Arithmétique

Pour le 4 décembre 2007

Exercice donné, en septembre 2003, en Polynésie

1) Comme p est un nombre entier premier supérieur ou égal à 7, alors p est nombre impair. Ainsi, p n'est pas divisible par 3 ; d'où le reste de la division euclidienne de p par 3 est soit 1, soit 2. Par conséquent, **p est congru à -1 ou à 1 modulo 3.**

Si $p \equiv 1 \pmod{3}$, alors $p^4 \equiv 1^4 \pmod{3}$; d'où $p^4 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Ainsi, l'entier n est divisible par 3.

Si $p \equiv -1 \pmod{3}$, alors $p^4 \equiv (-1)^4 \pmod{3}$; d'où $p^4 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Ainsi, l'entier n est divisible par 3.

Par conséquent, **n est divisible par 3.**

2) Comme p est impair, il existe un entier naturel k tel que $p = 2k + 1$.

D'où $p^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1)$.

Comme $n = p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1)$, alors

$$n = 4k(k + 1)((2k + 1)^2 + 1) = 4k(k + 1)(4k^2 + 4k + 2) = 8k(k + 1)(2k^2 + 2k + 1).$$

De plus, $k(k + 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, il est donc pair. Il existe alors un entier q tel que $k(k + 1) = 2q$; on en déduit alors que $n = 16q(2k^2 + 2k + 1)$.

Comme $q(2k^2 + 2k + 1)$ est un entier, alors **n est divisible par 16.**

3) Comme p est un nombre entier premier supérieur ou égal à 7, alors p n'est pas divisible par 5. Donc les restes de la division euclidienne de p par 5 sont 1, 2, 3 ou 4.

Si $p \equiv 1 \pmod{5}$, alors $p^4 \equiv 1^4 \pmod{5}$; d'où $p^4 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$. Ainsi, l'entier n est divisible par 5.

Si $p \equiv 2 \pmod{5}$, alors $p^4 \equiv 2^4 \pmod{5}$; d'où $p^4 - 1 \equiv 15 \pmod{5}$, c'est-à-dire $p^4 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$. Ainsi, l'entier n est divisible par 5.

Si $p \equiv 3 \pmod{5}$, alors $p^4 \equiv 3^4 \pmod{5}$; d'où $p^4 - 1 \equiv 80 \pmod{5}$, c'est-à-dire $p^4 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$. Ainsi, l'entier n est divisible par 5.

Si $p \equiv 4 \pmod{5}$, alors $p^4 \equiv 4^4 \pmod{5}$; d'où $p^4 - 1 \equiv 255 \pmod{5}$, c'est-à-dire $p^4 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$. Ainsi, l'entier n est divisible par 5.

Par conséquent, **n est divisible par 5.**

4) a) Si a divise c , alors il existe un entier q_1 tel que $c = aq_1$.

Si b divise c , alors il existe un entier q_2 tel que $c = bq_2$.

On en déduit alors que $aq_1 = bq_2$, et par suite, que a divise bq_2 . Comme a et b premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, a divise q_2 .

Il existe alors un entier q_3 tel que $q_2 = aq_3$; donc, $c = baq_3$. On peut alors dire que ab divise c .

Donc, si a divise c et b divise c , avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c .

b) D'après les questions 1), 2) et 3), n est divisible par 3, par 16 et par 5.

Or 3 et 16 sont premiers entre eux, d'après la question 4) a), $3 \times 16 = 48$ divise n .

Comme 48 divise n et que 5 divise n , d'après la question précédente, $48 \times 5 = 240$ divise n .

5) S'il existe quinze nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_{15} supérieurs ou égaux à 7, d'après la question 4) b), les nombres $p_1^4 - 1, p_2^4 - 1, \dots$, et $p_{15}^4 - 1$ sont tous divisibles par 240.

Ainsi $p_1^4 - 1 \equiv 0 \pmod{240}$, $p_2^4 - 1 \equiv 0 \pmod{240}$, ..., et $p_{15}^4 - 1 \equiv 0 \pmod{240}$.

En utilisant les propriétés des congruences, on en déduit que :

$p_1^4 - 1 + p_2^4 - 1 + \dots + p_{15}^4 - 1 \equiv 0 \pmod{240}$, ou encore que

$p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4 \equiv 15 \pmod{240}$. Il existe alors un entier N tel que $A = 240N + 15$.

Or $240 = 15 \times 16$, d'où : $A = 15(16N + 1)$. Comme $16N + 1$ est un entier, alors A est divisible par 15, et, par suite A n'est pas un nombre premier.

Par conséquent, **il n'existe pas de nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_{15} supérieurs ou égaux à 7 tels que A soit un nombre premier.**