

DEVOIR MAISON N° 6

PGCD et théorème de Bézout

Pour le 8 janvier 2008

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

- 1) a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $123u + 2003v = 1$.
b) En déduire un entier relatif k_0 tel que : $123k_0 \equiv 1 \pmod{2003}$.
c) Montrer que, pour tout entier relatif x , $123x \equiv 456 \pmod{2003}$ si, et seulement si, $x \equiv 456k_0 \pmod{2003}$.
d) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $123x \equiv 456 \pmod{2003}$.
e) Montrer qu'il existe un unique entier n tel que : $1 \leq n \leq 2002$ et $123n \equiv 456 \pmod{2003}$.
- 2) Soit a un entier tel que $1 \leq a \leq 2002$.
a) Déterminer : PGCD (a ; 2003).
En déduire qu'il existe un entier m tel que : $am \equiv 1 \pmod{2003}$.
b) Montrer que, pour tout entier b , il existe un unique entier x tel que : $0 \leq x \leq 2002$ et $ax \equiv b \pmod{2003}$.