

## DEVOIR MAISON N° 7

*Des nombres étranges*

*Pour le 15 janvier 2008*

**Cet exercice fait partie de ceux qui ont été publiés  
sous la responsabilité de l'Inspection Générale de Mathématiques.**

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour  $k$  entier strictement positif, on note  $N_k$  le rep-unit qui s'écrit à l'aide de  $k$  chiffres 1.

Ainsi  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 11$ ,  $N_3 = 111$ , ...

1) Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2) À quelle condition sur  $k$  le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit  $N_k$  ? Justifier brièvement la réponse.

3) Pour  $k > 1$ , le rep-unit  $N_k$  est défini par  $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{k-1}$ .

Justifier l'égalité :  $9N_k = 10^k - 1$  pour tout entier  $k > 1$ .

4) Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de  $10^k$ , pour  $k$  entier compris entre 1 et 8.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8
reste de la division de $10^k$ par 7	3	2	6	4	5	1	3	2

Soit  $k$  un entier strictement positif. Démontrer que : «  $10^k \equiv 1 \pmod{7}$  » équivaut à «  $k$  est multiple de 6 ».

En déduire que 7 divise  $N_k$  si, et seulement si,  $k$  est multiple de 6.