CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 7

Des nombres étranges	***Pour le 15 janvier 2008***

1) Un rep-unit ne se termine jamais par un chiffre pair, donc ce n'est pas un nombre divisible par 2.
Un rep-unit ne se termine jamais par un 0 ni par un 5, donc ce n'est pas un nombre divisible par 5.
Par conséquent, **2 et 5 sont deux nombres premiers inférieurs à 10 qui n'apparaissent jamais dans la décomposition d'un rep-unit**.

2) Un nombre est divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 3. Or N_k possède k chiffres.
Par conséquent, **le nombre 3 apparaît dans la décomposition du rep-unit N_k si, et seulement si, k est divisible par 3**.

3) Comme N_k est la somme des k premiers termes de la suite géométrique $\left(10^k\right)$, de raison 10, alors : $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 \times \frac{1-10^k}{1-10} = \frac{10^k - 1}{9}$.
Par conséquent, **$9N_k = 10^k - 1$ pour tout entier $k > 1$**.

4) a) • Supposons que $10^k \equiv 1 \pmod 7$.
Il existe un entier naturel q et un entier naturel r tels que $k = 6q + r$ avec $0 \leq r < 6$.

D'où : $10^{6q+r} \equiv 1 \pmod 7$, c'est-à-dire $\left(10^6\right)^q \times 10^r \equiv 1 \pmod 7$.

Or $10^6 \equiv 1 \pmod 7$, alors $10^r \equiv 1 \pmod 7$.
De plus, d'après le tableau donné, le reste de la division de 10^k par 7 est 1 lorsque $k = 6$.
Cependant, r est un reste compris entre 0 et 5 ; donc, la seule possibilité est $r = 0$.
Par conséquent, k est un multiple de 6.

• Réciproquement, supposons que k est un multiple de 6.
Il existe alors un entier q tel que $k = 6q$.
D'où, $10^k = \left(10^6\right)^q$. Or $10^6 \equiv 1 \pmod 7$, donc $10^k \equiv 1 \pmod 7$.

• Conclusion : **« $10^k \equiv 1$ (7) » équivaut à « k est multiple de 6 »**.

b) • Supposons que 7 divise N_k.
Il existe alors un entier a tel que $N_k = 7a$.
Or $9N_k = 10^k - 1$, d'où $63a = 10^k - 1$, c'est-à-dire $10^k = 63a + 1$.
Comme 63 est un multiple de 7, alors $63a + 1 \equiv 1 \pmod 7$.
Par conséquent, $10^k \equiv 1 \pmod 7$.
D'après ce qui précède dans le a), on en déduit que k est un multiple de 6.

• Réciproquement, supposons que k est un multiple de 6.
D'après la question 4) a), on peut en déduire que $10^k \equiv 1 \pmod 7$.
Or $9N_k = 10^k - 1$, d'où $9N_k \equiv 0 \pmod 7$.
Donc 7 divise $9N_k$. Comme 7 et 9 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, on en déduit que 7 divise N_k.

• Conclusion : **7 divise N_k si, et seulement si, k est multiple de 6**.

C. Lainé