DEVOIR MAISON N° 9

Théorème de Gauss et petit théorème de Fermat	***Pour le 5 février 2008***

1) On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b) Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k \ ; \ 68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbf{Z}$.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e)

2) Démontrer que 227 est un nombre premier.

3) On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions f et g de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ définies de la manière suivante :

à tout entier de $\mathscr{A}$, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 ;

à tout entier de $\mathscr{A}$, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a) Vérifier que $g\left[f(0)\right] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

b) Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de $\mathscr{A}$, $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$.

c) En utilisant 1) b), en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de $\mathscr{A}$, $g\left[f(a)\right] = a$.

Que peut-on dire de $f\left[g(a)\right] = a$?