Exercice 2 *(France, septembre 2006)*

1) a) $17\times 9-24\times 6=153-144=9$; donc **le couple $(9\ ;\ 6)$ est solution de l'équation (E)**.

b) Soit $(x\ ;y)$ un couple solution quelconque de (E), alors, d'après la question précédente, $17x-24y=17\times 9-24\times 6$, ce qui équivaut à $17(x-9)=24(y-6)$.

On en déduit que 24 divise $17(x-9)$, et comme 24 et 17 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 24 divise $x-9$. Il existe donc un entier k tel que $x-9=24k$, c'est-à-dire $x=9+24k$. En remplaçant x par $9+24k$ dans l'égalité $17(x-9)=24(y-6)$, on a : $17\times 24k=24(y-6)$, soit $y-6=17k$, c'est-à-dire $y=6+17k$.

Un couple solution quelconque de (E) est alors de la forme $(9+24k\ ;\ 6+17k)$, où k appartient à **Z**.

Réciproquement, on vérifie que tous les couples de la forme $(9+24k\ ;\ 6+17k)$, où k appartient à **Z**, sont solutions de l'équation (E).

$17(9+24k)-24(6+17k)=153+17\times 24k-144-24\times 17k=9$. Ce qui vérifie ce que l'on souhaite.

Par conséquent, **l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(9+24k\ ;\ 6+17k)$, où k appartient à Z**.

2) a) A l'instant $t=0$, Jean part du point H et parcourt $\frac{3}{8}$ du cercle pour arriver en A.

Comme il met 24 secondes pour faire un tour, alors il passe pour la première fois en A au bout de 9 secondes (en effet, $\frac{3}{8}\times 24=9$).

Notons y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A ; il mettra $(9+24y)$ secondes pour passer la $(y+1)^{ème}$ fois en A.

Le pompon part de A et réalise un tour en 17 secondes ; il passera donc en A toutes les $17x$ secondes.

Or Jean attrapera le pompon quand ils passeront tous les deux en même temps au point A, alors **Jean attrapera le pompon si $9+24y=17x$, c'est-à-dire si $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation (E), x et y étant des entiers naturels (car ce sont des nombres de tours)**.

b) D'après la question précédente et la question 1) b), Jean attrape le pompon si $x=9+24k$ et $y=6+17k$ (avec x et y des entiers naturels).

La première rencontre est alors obtenue en prenant $k=0$; dans ce cas, $x=9$ et $y=6$.

D'où Jean attrapera le pompon pour la première fois au bout de six tours, c'est-à-dire $6\times 24=144$ secondes après le départ.

Or 144 secondes correspondent à 2 minutes et 24 secondes.

Par conséquent, **si Jean paye pour deux minutes, il n'aura pas le temps d'attraper le pompon**.

c) ➢ **Supposons qu'à partir d'un certain temps *t*, Jean attrape le pompon au point B.**

Notons y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en B et x le nombre de tours effectués par le pompon.

A l'instant $t=0$, Jean part du point H et parcourt $\frac{5}{8}$ du cercle pour arriver en B.

Comme il met 24 secondes pour faire un tour, alors il passe pour la première fois en B au bout de 15 secondes (en effet, $\frac{5}{8}\times 24=15$).

Notons y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en B ; il mettra $(15+24y)$ secondes pour passer la $(y+1)^{ème}$ fois en B.

A l'instant $t=0$, le pompon part du point A et parcourt $\frac{1}{4}$ du carré pour arriver en B.

Comme il réalise un tour en 17 secondes ; il mettra donc $\frac{17}{4}$ de secondes pour passer en B la première fois. Le pompon passera donc toutes les $\left(\frac{17}{4}+17x\right)$ secondes en B.

Jean attrapera le pompon quand ils passeront tous les deux en même temps au point B, c'est-à-dire si $15+24y=\frac{17}{4}+17x$.

Or $15+24y=\frac{17}{4}+17x$ équivaut à $15+24y-17x=\frac{17}{4}$. Ce qui est impossible ; en effet, x et y étant des entiers naturels, $15+24y-17x$ en est un aussi.
Par conséquent, **Jean ne peut pas attraper le pompon en B**.

➢ **Supposons qu'à partir d'un certain temps *t*, Jean attrape le pompon au point C.**
Notons y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en C et x le nombre de tours effectués par le pompon.

A l'instant $t=0$, Jean part du point H et parcourt $\frac{7}{8}$ du cercle pour arriver en C.

Comme il met 24 secondes pour faire un tour, alors il passe pour la première fois en C au bout de 21 secondes (en effet, $\frac{7}{8}\times 24=21$).

Notons y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en C ; il mettra $(21+24y)$ secondes pour passer la $(y+1)^{ème}$ fois en C.

A l'instant $t=0$, le pompon part du point A et parcourt $\frac{1}{2}$ du carré pour arriver en C.

Comme il réalise un tour en 17 secondes ; il mettra donc $\frac{17}{2}$ de secondes pour passer en C la première fois. Le pompon passera donc toutes les $\left(\frac{17}{2}+17x\right)$ secondes en C.

Jean attrapera le pompon quand ils passeront tous les deux en même temps au point C, c'est-à-dire si $21+24y=\frac{17}{2}+17x$.

Or $21+24y=\frac{17}{2}+17x$ équivaut à $21+24y-17x=\frac{17}{2}$. Ce qui est impossible ; en effet, x et y étant des entiers naturels, $21+24y-17x$ en est un aussi.
Par conséquent, **Jean ne peut pas attraper le pompon en C**.

➢ **Supposons qu'à partir d'un certain temps *t*, Jean attrape le pompon au point D.**
Notons y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en D et x le nombre de tours effectués par le pompon.

A l'instant $t=0$, Jean part du point H et parcourt $\frac{1}{8}$ du cercle pour arriver en D.

Comme il met 24 secondes pour faire un tour, alors il passe pour la première fois en D au bout de 3 secondes (en effet, $\frac{1}{8}\times 24=3$).

Notons y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en D ; il mettra $(3+24y)$ secondes pour passer la $(y+1)^{ème}$ fois en D.

A l'instant $t=0$, le pompon part du point A et parcourt $\frac{3}{4}$ du carré pour arriver en D.

Comme il réalise un tour en 17 secondes ; il mettra donc $\frac{51}{4}$ de secondes pour passer en D la première fois. Le pompon passera donc toutes les $\left(\frac{51}{4}+17x\right)$ secondes en D.

Jean attrapera le pompon quand ils passeront tous les deux en même temps au point D, c'est-à-dire si $3+24y=\frac{51}{2}+17x$.

Or $3+24y=\frac{51}{2}+17x$ équivaut à $3+24y-17x=\frac{51}{4}$. Ce qui est impossible ; en effet, x et y étant des entiers naturels, $3+24y-17x$ en est un aussi.

Par conséquent, **Jean ne peut pas attraper le pompon en D**.

d) Notons y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon.

A l'instant $t=0$, Jean part du point E et parcourt $\frac{1}{8}$ du cercle pour arriver en A.

Comme il met 24 secondes pour faire un tour, alors il passe pour la première fois en A au bout de 3 secondes (en effet, $\frac{1}{8}\times 24=3$).

Notons y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A ; il mettra $(3+24y)$ secondes pour passer la $(y+1)^{ème}$ fois en A.

Le pompon part de A et réalise un tour en 17 secondes ; il passera donc en A toutes les $17x$ secondes.

Jean attrapera le pompon quand ils passeront tous les deux en même temps au point A, c'est-à-dire si $3+24y=17x$, soit $17x-24y=3$, x et y étant des entiers naturels.

Or le couple $(3\ ;\ 2)$ est une solution particulière de l'équation $17x-24y=3$. En effet, $17\times 3-24\times 2=51-48=3$.

Dans ce cas, le pompon fera 3 tours entiers avant d'être attrapé, et ceci en 51 secondes (car $17\times 3=51$), c'est-à-dire en moins de 2 minutes.

Par conséquent, **si Jean part du point E, il aura le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes**.