

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Divisibilité et congruences

Le 9 octobre 2007

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Soit a, b, c des entiers relatifs.

En utilisant les définitions du cours, démontrer les deux propriétés suivantes :

- 1) Si a divise b et si b divise c alors a divise c .
- 2) Si a divise b alors a^2 divise b^2 .

Exercice 2

Soit p et q désignent deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$.

- 1) Démontrer que p est impair.
- 2) Démontrer que q est pair.

Exercice 3

Soit a est un entier relatif et soit b un entier naturel.

- 1) Écrire l'égalité et les conditions définissant la division euclidienne de a par b .
- 2) Application : Écrire la division euclidienne de -753 par 7 .

Exercice 4

1) Vérifier que 7 divise les nombres : $2^6 - 1$; $3^6 - 1$; $4^6 - 1$; $5^6 - 1$.

2) Soit n un entier naturel, et A_n défini par : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$.

Montrer que $A_{n+6} - A_n$ est divisible par 7 .

3) Soit n un entier naturel, q son quotient et r son reste dans la division euclidienne par 6 .

Montrer que A_n et A_r ont même reste dans la division euclidienne par 7 .

4) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est divisible par 7 .

5) Soit $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$.

a) Montrer que $A_n \equiv B_n \pmod{7}$.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles B_n est divisible par 7 .