

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Divisibilité et congruences

Le 9 octobre 2007

Exercice 1

1) Si a divise b alors il existe un entier k tel que $b = k \times a$.

Si b divise c alors il existe un entier k' tel que $c = k' \times b$.

On en déduit que : $c = k' \times b = k' \times k \times a = (kk') \times a$.

Comme k et k' sont des entiers, alors kk' est un entier. Par conséquent, **a divise c** .

2) Si a divise b alors il existe un entier k tel que $b = k \times a$.

Alors $b^2 = (k \times a)^2 = k^2 \times a^2$.

Comme k est un entier, alors k^2 est un entier (on peut même dire que k^2 est un entier naturel).

Par conséquent, **a^2 divise b^2** .

Exercice 2

Soit p et q désignent deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$ **(1)**.

1) L'égalité (1) s'écrit $p^2 = 1 + 2q^2$.

Comme q est un entier, alors $2q^2$ est un entier multiple de 2, c'est-à-dire un entier pair.

Donc, **$p^2 = 1 + 2q^2$ est un entier impair (2)**.

Raisonnons par l'absurde ; supposons que p est un entier pair.

Dans ce cas, $p = 2a$ avec $a \in \mathbf{Z}$. D'où : $p^2 = 4a^2 = 2 \times (2a^2)$ avec $2a^2$ un entier.

Par conséquent, p^2 serait aussi un entier pair, ce qui est en contradiction avec le résultat **(2)** trouvé ci-dessus.

On en déduit donc que **p est un entier impair**.

2) L'égalité (1) s'écrit $2q^2 = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

Comme p est un entier impair (d'après la question précédente), alors $p-1$ et $p+1$ sont des entiers pairs.

Il existe alors un entier k tel que $p-1 = 2k$, c'est-à-dire $p = 2k+1$, et, par suite,

$p+1 = 2k+2 = 2(k+1)$.

Donc, $2q^2 = (p-1)(p+1) = 2k \times 2(k+1) = 4k(k+1)$, c'est-à-dire $q^2 = 2k(k+1)$.

Comme $k(k+1)$ est un entier, alors **q^2 est un entier pair (3)**.

Raisonnons par l'absurde ; supposons que q est un entier impair.

Dans ce cas, $p = 2b+1$ avec $b \in \mathbf{Z}$. D'où : $q^2 = (2b+1)^2 = 2 \times (2b^2 + 2b) + 1$ avec $2b^2 + 2b$ un entier.

Par conséquent, q^2 serait aussi un entier impair, ce qui est en contradiction avec le résultat **(3)** trouvé ci-dessus.

On en déduit donc que **q est un entier pair**.

Exercice 3

1) Soit a est un entier relatif et soit b un entier naturel.

La division euclidienne de a par b se traduit par l'égalité : **$a = bq + r$ avec $q \in \mathbf{Z}$, $z \in \mathbf{N}$ et $0 \leq r < b$** .

2) La division euclidienne de -753 par 7 , se traduit par l'égalité : $-753 = 7 \times (-108) + 3$;
on a bien $-108 \in \mathbf{Z}$, $3 \in \mathbf{N}$ et $0 \leq 3 < 7$.

Exercice 4

1) a) $2^6 = 64$, d'où $2^6 - 1 = 63$. Or 63 est divisible par 7 . Donc $2^6 - 1$ est divisible par 7 .

b) $3^6 = 729$, d'où $3^6 - 1 = 728$. Or $728 = 104 \times 7$. Donc $3^6 - 1$ est divisible par 7 .

c) $4^6 = 4096$, d'où $4^6 - 1 = 4095$. Or $4095 = 585 \times 7$. Donc $4^6 - 1$ est divisible par 7 .

d) $5^6 = 15625$, d'où $5^6 - 1 = 15624$. Or $15624 = 2232 \times 7$. Donc $5^6 - 1$ est divisible par 7 .

2) $A_{n+6} - A_n = 2^{n+6} + 3^{n+6} + 4^{n+6} + 5^{n+6} - 2^n - 3^n - 4^n - 5^n$.

D'où : $A_{n+6} - A_n = 2^n (2^6 - 1) + 3^n (3^6 - 1) + 4^n (4^6 - 1) + 5^n (5^6 - 1)$.

Or, d'après la question 1), $2^6 - 1$, $3^6 - 1$, $4^6 - 1$ et $5^6 - 1$ sont divisibles par 7 .

Par conséquent, $A_{n+6} - A_n$ est divisible par 7 .

3) n est un entier naturel dont q est le quotient et r le reste, dans la division euclidienne par 6
Alors $n = 6q + r$.

D'après la question 1), $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$, d'où $2^{6q} \equiv 1^q \pmod{7}$.

De même, $3^{6q} \equiv 1^q \pmod{7}$; $4^{6q} \equiv 1^q \pmod{7}$ et $5^{6q} \equiv 1^q \pmod{7}$.

Par conséquent, $2^{6q+r} + 3^{6q+r} + 4^{6q+r} + 5^{6q+r} \equiv 2^r + 3^r + 4^r + 5^r \pmod{7}$, c'est-à-dire
 $A_n \equiv A_r \pmod{7}$

Donc, A_n et A_r ont même reste dans la division euclidienne par 7 .

4) D'après la question 3), A_n est divisible par 7 si A_r est divisible par 7 .

Or r est un entier naturel compris entre 0 et 5 . D'où :

- Si $r = 0$, $A_0 = 4$ et 4 n'est pas divisible par 7 .
- Si $r = 1$, $A_1 = 14$ et 14 est divisible par 7 .
- Si $r = 2$, $A_2 = 54$ et 54 n'est pas divisible par 7 .
- Si $r = 3$, $A_3 = 224$ et 224 est divisible par 7 .
- Si $r = 4$, $A_4 = 978$ et 978 n'est pas divisible par 7 .
- Si $r = 5$, $A_5 = 4424$ et 4424 est divisible par 7 .

Par conséquent, A_n est divisible par 7 lorsque $n \equiv 1 \pmod{6}$, ou $n \equiv 3 \pmod{6}$, ou $n \equiv 5 \pmod{6}$.

5) a) $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$.

Or : $100 \equiv 2 \pmod{7}$, d'où $100^n \equiv 2^n \pmod{7}$.

$101 \equiv 3 \pmod{7}$, d'où $101^n \equiv 3^n \pmod{7}$.

$102 \equiv 4 \pmod{7}$, d'où $102^n \equiv 4^n \pmod{7}$.

$103 \equiv 5 \pmod{7}$, d'où $103^n \equiv 5^n \pmod{7}$.

Par conséquent, $B_n \equiv 2^n + 3^n + 4^n + 5^n \pmod{7}$, c'est-à-dire $B_n \equiv A_n \pmod{7}$.

b) Comme $B_n \equiv A_n \pmod{7}$, alors B_n et A_n ont le même reste dans la division euclidienne par 7 .

Donc B_n est divisible par 7 lorsque $n \equiv 1 \pmod{6}$, ou $n \equiv 3 \pmod{6}$, ou $n \equiv 5 \pmod{6}$.