

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Divisibilité et nombres premiers

Le 27 novembre 2007

Exercice 1

1) Faisons un tableau des valeurs de $f(n)$ lorsque n est un entier naturel compris entre 1 et 20.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	43	47	53	61	71	83	97	113	131	151	173	197	223	251	281	313	347	383	421	461

D'après la table des nombres premiers fournie dans l'annexe, on remarque que, **pour $1 \leq n \leq 20$, $f(n)$ est un nombre premier.**

2) **Il n'est pas possible que $f(n)$ soit un nombre premier pour tout entier naturel n .**

En effet, $f(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 2) = 41 \times 43$, et ainsi $f(41)$ est divisible par 41.

3) Faisons un tableau des valeurs de $f(n)$ lorsque n est un entier naturel compris entre 21 et 40.

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$f(n)$	503	547	593	641	691	743	797	853	911	971	1033	1097	1163	1231	1301	1373	1447	1523	1601	1681

On remarque, **pour $21 \leq n \leq 39$, $f(n)$ est un nombre premier.** Par contre, **$f(40)$ n'est pas un nombre premier** car $f(40) = 1681 = 41^2$.

Exercice 2

1) Les nombres 756 ; 504 et 468 se décomposent de la façon suivante :

$$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \quad ; \quad 504 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \quad \text{et} \quad 468 = 2^2 \times 3^2 \times 13.$$

On peut donc choisir comme dénominateur commun $2^3 \times 3^3 \times 7 \times 13 = 19656$.

2) On en déduit alors que :

$$\frac{1}{756} = \frac{1}{2^2 \times 3^3 \times 7} = \frac{26}{19656} \quad ; \quad \frac{1}{504} = \frac{1}{2^3 \times 3^2 \times 7} = \frac{39}{19656} \quad \text{et} \quad \frac{1}{468} = \frac{1}{2^2 \times 3^3 \times 7} = \frac{42}{19656}.$$

$$\text{Par conséquent, } \frac{1}{756} + \frac{1}{504} - \frac{1}{468} = \frac{23}{19656}.$$

Exercice 3

En utilisant une calculatrice, il semble que le nombre N ne soit jamais un nombre premier pour tout entier naturel n .

Factorisons N : le discriminant du trinôme $2n^2 + 7n + 6$ est égal à 1 ; il possède alors deux

$$\text{racines : } n_1 = \frac{-7-1}{4} = -2 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-7+1}{4} = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{D'où : } 2n^2 + 7n + 6 = 2(n+2)\left(n + \frac{3}{2}\right) = (n+2)(2n+3), \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Comme n est un entier naturel, alors $n+2$ et $2n+3$ sont des entiers naturels strictement supérieurs à 1, et par conséquent, $2n^2 + 7n + 6$ n'est pas un nombre premier.

Il n'y a donc aucun entier naturel n pour lequel $2n^2 + 7n + 6$ soit un nombre premier.

Exercice 4

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.

p	5	7	11	13	17	19	23
p^2+11	36	60	132	180	300	372	540
Est-il divisible par 12 ?	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI

Il semble que la proposition soit vraie.

On peut voir que : $p^2 + 11 = p^2 - 1 + 12 = (p-1)(p+1) + 12$, pour tout entier naturel p .

On en déduit que $p^2 + 11$ est divisible par 12 si, et seulement si, $(p-1)(p+1)$ est divisible par 12.

Or p est un entier naturel premier strictement supérieur à 3, il n'est donc pas pair.

Par conséquent, p est un nombre impair, ce qui entraîne que $p-1$ et $p+1$ sont des entiers pairs.

Par suite, $(p-1)(p+1)$ est divisible par 4.

De plus, les entiers $p-1$, p et $p+1$ sont trois entiers consécutifs ; il y en a donc un parmi ces trois là qui est divisible par 3. Or p est premier et strictement supérieur à 3, il ne peut pas alors être divisible par 3. Par conséquent, soit $p-1$, soit $p+1$ est divisible par 3 ; ce qui implique que $(p-1)(p+1)$ est divisible par 3.

D'après l'indication donnée dans l'énoncé, comme $(p-1)(p+1)$ est divisible par 3 et 4, qui sont premiers entre eux, alors $(p-1)(p+1)$ est divisible par $3 \times 4 = 12$.

Donc, si p est un nombre premier strictement supérieur à 3, alors $p^2 + 11$ est divisible par 12.

Exercice 5

1) **Le nombre $N_2 = 11$ est un nombre premier.**

$N_3 = 111 = 37 \times 3$, alors **N_3 n'est pas premier.**

$N_4 = 1111 = 11 \times 101$, alors **N_4 n'est pas premier.**

2) $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 10.

Alors : $N_p = 1 \times \frac{1-10^p}{1-10} = \frac{10^p - 1}{9}$, pour tout entier naturel $p \geq 2$.

Comme N_p est un entier, alors **$10^p - 1$ est divisible par 9, pour tout entier naturel $p \geq 2$.**

3) a) On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.

Alors $10^p - 1 = 10^{2q} - 1 = (10^2)^q - 1 = (10^2 - 1) \left((10^2)^{q-1} + (10^2)^{q-2} + \dots + (10^2) + 1 \right)$.

D'où :

$$N_p = \frac{10^p - 1}{9} = \frac{10^2 - 1}{9} \times \left((10^2)^{q-1} + (10^2)^{q-2} + \dots + (10^2) + 1 \right) = N_2 \times \left((10^2)^{q-1} + (10^2)^{q-2} + \dots + (10^2) + 1 \right)$$

Comme $\left((10^2)^{q-1} + (10^2)^{q-2} + \dots + (10^2) + 1 \right)$ est un entier, alors **N_2 divise N_p .**

b) On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.

Alors $10^p - 1 = 10^{3q} - 1 = (10^3)^q - 1 = (10^3 - 1) \left((10^3)^{q-1} + (10^3)^{q-2} + \dots + (10^3) + 1 \right)$. D'où :

$$N_p = \frac{10^p - 1}{9} = \frac{10^3 - 1}{9} \times \left((10^3)^{q-1} + (10^3)^{q-2} + \dots + (10^3) + 1 \right) = N_3 \times \left((10^3)^{q-1} + (10^3)^{q-2} + \dots + (10^3) + 1 \right)$$

Comme $\left((10^3)^{q-1} + (10^3)^{q-2} + \dots + (10^3) + 1 \right)$ est un entier, alors **N_3 divise N_p** .

c) On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.

Alors $10^p - 1 = 10^{kq} - 1 = (10^k)^q - 1 = (10^k - 1) \left((10^k)^{q-1} + (10^k)^{q-2} + \dots + (10^k) + 1 \right)$. D'où :

$$N_p = \frac{10^p - 1}{9} = \frac{10^k - 1}{9} \times \left((10^k)^{q-1} + (10^k)^{q-2} + \dots + (10^k) + 1 \right) = N_k \times \left((10^k)^{q-1} + (10^k)^{q-2} + \dots + (10^k) + 1 \right)$$

Comme $\left((10^k)^{q-1} + (10^k)^{q-2} + \dots + (10^k) + 1 \right)$ est un entier, alors **N_k divise N_p** .

4) Supposons que p ne soit pas premier tel que $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1. D'après la question 3) c), N_k divise N_p .

Comme $1 < k < p$, alors $1 < N_k < N_p$. On en déduit que N_p possède un diviseur, N_k , autre que 1 ou que lui-même. D'où N_p n'est pas un nombre premier.

Par conséquent, **une condition nécessaire pour que N_p soit premier est que p soit premier.**

Cette condition n'est pas suffisante car 3 est premier et N_3 ne l'est pas (voir question 1)).