DEVOIR SURVEILLÉ N° 3

PGCD et théorème de Bézout	***Le 18 décembre 2007***

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 *(2 points)*

Démontrer que, pour tout entier naturel n, les nombres $2n+1$ et $9n+4$ sont premiers entre eux.

Exercice 2 *(3 points)*

On note n un naturel non nul, A l'entier $3n+1$ et B l'entier $5n-1$.

1) Montrer que le PGCD de A et B est un diviseur de 8.
2) Pour quelles valeurs de n ce PGCD est-il égal à 8 ?

Exercice 3 *(3 points)*

1) Montrer que, si les entiers a et b^2 sont premiers entre eux, alors a et b sont premiers entre eux.
2) Étudier la réciproque.

Exercice 4 *(4 points)*

Déterminer les couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers naturels tels que $a > b$, $a^2 - b^2 = 2004$ et $\text{PGCD}(a\ ;\ b) = 2$.

Exercice 5 *(8 points)*

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres :

$$a = n^3 - n^2 - 12n \text{ et } b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1) Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.
2) On pose $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$. On note d le PGCD de α et β.
   a) Établir une relation entre α et β indépendante de n.
   b) Démontrer que d est un diviseur de 5.
   c) Démontrer que le nombres α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, $n-2$ est multiple de 5.
3) Montrer que $2n+1$ et n sont premiers entre eux.
4) a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.
   b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

C. Lainé