CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 3

PGCD et théorème de Bézout	*Le 18 décembre 2007*

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, $9(2n+1)-2(9n+4)=1$.

D'après le théorème de Bézout, on en déduit que **les entiers $2n+1$ et $9n+4$ sont premiers entre eux**.

Exercice 2

1) $B=5n-1=1\times(3n+1)+2n-2=A+2n-2$; alors $\text{PGCD}(A,\ B)=\text{PGCD}(3n+1,\ 2n-2)$.

Or $3n+1=1\times(2n-2)+n+3$, d'où $\text{PGCD}(3n+1,\ 2n-2)=\text{PGCD}(2n-2,\ n+3)$.

Par suite, $\text{PGCD}(A,\ B)=\text{PGCD}(2n-2,\ n+3)$.

Comme $2n-2=2\times(n+3)-8$, alors $\text{PGCD}(2n-2,\ n+3)=\text{PGCD}(n+3,\ 8)$.

Par conséquent, $\text{PGCD}(A,\ B)=\text{PGCD}(n+3,\ 8)$.

On en déduit alors que **le PGCD de A et B est un diviseur de 8**.

2) D'après la question précédente, **le PGCD de A et B est égal à 8** si, et seulement si, 8 divise $n+3$, c'est-à-dire **si, et seulement si, $n=-3+8k$ $(k\in\mathbb{Z})$**.

Exercice 3

1) Si les entiers a et b^2 sont premiers entre eux, il existe, d'après le théorème de Bézout, deux entiers u et v tels que $au+b^2v=1$.

Or $au+b^2v=1$ équivaut à $au+b(bv)=1$ et, comme bv est un entier, le théorème de Bézout nous permet de conclure que a et b sont premiers entre eux.

Par conséquent, **si les entiers a et b^2 sont premiers entre eux, alors a et b sont premiers entre eux**.

2) Supposons que a et b soient premiers entre eux. Alors, ces deux entiers n'ont aucun facteur premier commun.

Or b^2 a les mêmes facteurs premiers que b dans sa décomposition en facteurs premiers (les exposants de b^2 seront doublés par rapport à ceux de b), alors a et b^2 n'ont aucun facteur premier commun, et par suite, ils sont premiers entre eux.

Par conséquent, **si a et b sont premiers entre eux, alors a et b^2 sont premiers entre eux**.

Exercice 4

Soit a et b deux entiers naturels dont le PGCD est égal à 2. Il existe alors deux entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que $a=2a'$ et $b=2b'$.

Alors $a^2-b^2=2004$ équivaut à $4(a'^2-b'^2)=2004$, c'est-à-dire à $a'^2-b'^2=501$, ou encore à $(a'+b')(a'-b')=501$.

Or les diviseurs de 501 sont : 1 ; 3 ; 167 et 501. De plus, $a>b$, alors $a'>b'$.

Les couples $(a',\ b')$ sont donc solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} a'+b'=501 \\ a'-b'=1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a'+b'=167 \\ a'-b'=3 \end{cases}$$, avec a' et b' premiers entre eux.

Or $\begin{cases} a'+b'=501 \\ a'-b'=1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a'=251 \\ b'=250 \end{cases}$, et $\begin{cases} a'+b'=167 \\ a'-b'=3 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a'=85 \\ b'=82 \end{cases}$.

Par conséquent, **les couples $(a\ ;\ b)$ solutions du problème sont $(502\ ;\ 500)$ et $(170\ ;\ 164)$**.

Exercice 5

1) $a=n^3-n^2-12n=n\left(n^2-n-12\right)$.

Or le discriminant du trinôme n^2-n-12 est égal à 49 ; alors n^2-n-12 admet deux racines $n_1=\frac{1-7}{2}=-3$ et $n_2=\frac{1+7}{2}=4$. On en déduit que $n^2-n-12=(n+3)(n-4)$, et par suite, $a=n(n+3)(n-4)$. Comme $n(n+3)$ est un entier, on conclut que **a est divisible par $n-4$**.

Le discriminant de b est égal à 81 ; alors $2x^2-7x-4$ admet deux racines $x_1=\frac{7-9}{4}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{7+9}{4}=4$. On en déduit que $2n^2-7n-4=2\left(n+\frac{1}{2}\right)(n-4)=(2n+1)(n-4)$. Comme $2n+1$ est un entier, on conclut que **b est divisible par $n-4$**.

2) a) Comme $\beta=n+3$, alors $n=\beta-3$. D'où : $\alpha=2n+1=2(\beta-3)+1=2\beta-5$.
Par conséquent, **$2\beta-\alpha=5$**.

b) Soit d le PGCD de α et β. Alors d divise α et β, et divise donc $2\beta-\alpha$.
On en déduit que **d divise 5**.

c) Comme $\alpha=2n+1=n+3+n-2=\beta+(n-2)$, alors $\text{PGCD}(\alpha,\ \beta)=\text{PGCD}(\beta,\ n-2)$.
Or $\beta=n+3=(n-2)+5$, d'où $\text{PGCD}(\beta,\ n-2)=\text{PGCD}(n-2,\ 5)$.
On en déduit que $\text{PGCD}(\alpha,\ \beta)=\text{PGCD}(n-2,\ 5)$.
Les nombres α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, 5 est un diviseur commun à α et β c'est-à-dire si, et seulement si, 5 divise leur PGCD d. Or on a vu, dans la question 2) b), que d divise 5.
Donc, les nombres α et β sont donc multiples de 5 si, et seulement, si $d=5$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\text{PGCD}(n-2,\ 5)=5$, ou encore si, et seulement si, 5 divise $n-2$.
Par conséquent, **les nombres α et β sont donc multiples de 5 si, et seulement, 5 divise $n-2$**.

3) On remarque que, pour tout entier naturel n, $1\times(2n+1)-2\times n=1$.
D'après le théorème de Bézout, **$2n+1$ et n sont premiers entre eux**.

4) a) $\text{PGCD}(a,\ b)=\text{PGCD}\big(n(n+3)(n-4),(2n+1)(n-4)\big)=(n-4)\times\text{PGCD}\big(n(n+3),2n+1\big)$ d'après la question 1).

• si $n-2$ est un multiple de 5, alors $\text{PGCD}(n+3,\ 2n+1)=5$ d'après la question 2) c).
De plus, d'après la question 4) a), n et $2n+1$ sont premiers entre eux, alors $\text{PGCD}\big(n(n+3),\ 2n+1\big)=\text{PGCD}(n+3,\ 2n+1)=5$. Par suite, $\text{PGCD}(a,\ b)=5\times(n-4)$.

• si $n-2$ n'est pas un multiple de 5, alors $\text{PGCD}(n+3,\ 2n+1)=1$ (en effet, 5 divise $\text{PGCD}(n-2,\ 5)$ et 5 ne divise pas $n-2$).
De plus, d'après la question 4) a), n et $2n+1$ sont premiers entre eux, alors $\text{PGCD}\big(n(n+3),\ 2n+1\big)=\text{PGCD}(n+3,\ 2n+1)=1$. Par suite, $\text{PGCD}(a,\ b)=1\times(n-4)$.

Conclusion : **Si $n-2$ est un multiple de 5, alors $\mathrm{PGCD}(a,\ b)=5n-20$.**
Si $n-2$ n'est pas un multiple de 5, alors $\mathrm{PGCD}(a,\ b)=n-4$.

b) • **si $n=11$** et comme $11-2$ n'est pas divisible par 5, alors **$\mathrm{PGCD}(a,\ b)=11-4=7$**.

• **si $n=12$** et comme $12-2$ est un multiple de 5, alors **$\mathrm{PGCD}(a,\ b)=60-20=40$**.