

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

**PGCD, théorème de Bézout
et théorème de Gauss**

Le 29 janvier 2008

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (France, juin 2006)

Partie A : Question de cours

- 1) Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
- 2) Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans \mathbf{Z}^2 le système (S) $\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$.

- 1) Démontrer qu'il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).
- 2) a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$.
b) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$.
- 3) a) Trouver un couple $(u ; v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2) b)).
- 4) Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Exercice 2

Déterminer tous les couples $(x ; y)$ d'entiers naturels tels que $\begin{cases} x + y = 27 \\ \text{PPCM}(x ; y) = 60 \end{cases}$.